Übungen E-Teilchen für Fortgeschrittene SS2010, Blatt 1

Ausgabe Freitag 9.4, Abgabe Freitag 16.4.

1. **Pauli Spin Matrizen**

   a) Benutzen Sie die expliziten Formen der 2×2 Pauli Matrixen um folgende Vertauschungs- und Antivertauschungsrelationen zu verifizieren:

   $$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad \text{und } \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbf{1},$$

   wobei ϵ_{ijk} der übliche antisymmetrische Tensor ist, δ_{ij} ist das Kronecker delta Symbol und $\mathbf{1}$ steht für die 2×2 Einheitsmatrix. Zeigen Sie damit, dass die Matrizen $\vec{\alpha}$, β (in Dirac-Darstellung) folgende Relationen erfüllen:

   $$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= 2\delta_{ij}, \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0, \\ \beta^2 &= 1. \end{aligned}$$

   b) Zeigen Sie, dass $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ und beweisen Sie damit

   $$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}\mathbf{1} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \times \vec{b}.$$

2. **Pauli-Gleichung**

   Zeigen Sie, dass aus der Dirac Gleichung für die "grosse" Komponenten φ im nichtrelativistischen Grenzfall und mit elektromagnetischem Feld

   $$i\hbar\dot{\varphi} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{P}\right)\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{P}\right)\varphi + q\Phi\varphi, \quad \text{mit } \vec{P} = \vec{p} - q\vec{A},$$

   die Pauli-Gleichung für das Elektron (q=-e) folgt:

   $$i\hbar\dot{\varphi} = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}\right)^2 + \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} - e\Phi\right]\varphi$$

   (Hinweis: Verwenden Sie die Gleichung aus 1b) sowie $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$)

3. **Nichtrelativistische Näherung der freien Dirac-Gleichung Lösungen:**

   Ein Elektron bewege sich in z-Richtung mit einem Impuls $p_z \ll mc$. Zeigen Sie, dass

   $$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{2mc} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{mc^2 + p_z^2/2m}{\hbar}\right)t + i\frac{p_z}{\hbar}z}$$

   die Diracgleichung näherungsweise erfüllt (bis auf Terme in höherer Ordnung von p_z/mc).