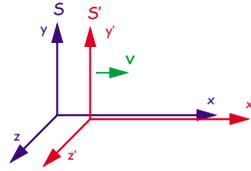


Lorentz Transformation

Spezielle Relativitätstheorie:
 Physikalische Gesetze gelten in jedem **inertialen** Bezugssystem gleich.
 (Inertialsystem ist ein System, in dem das erste Newton'sche Gesetz gilt)



Übergang von S nach S' :

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

mit $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ und $\beta \equiv v/c$

Übergang S' nach S: ersetze v durch -v!

Konsequenzen:

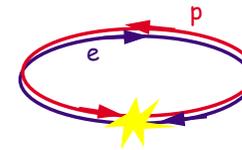
- **Relativität der Gleichzeitigkeit**
 $S: t_A = t_B \rightarrow S': t'_A = t'_B + \gamma v/c^2(x_B - x_A)$
- **Längenkontraktion**
 $L = L' / \gamma$ (aber transversal: $L_T = L'_T$!)
- **Zeitdilatation**
 $T = \gamma T'$ (\rightarrow Lebensdauer von Teilchen)
- **Addition von Geschwindigkeiten**
 $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\Delta t' + (v/c^2) \Delta x'} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + (v/c^2)(\Delta x'/\Delta t')}$
 $\rightarrow u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$ ($u'=c \Rightarrow u=c$, $u',v \ll c \Rightarrow u=u'+v$)

Beispiele

HERA Elektron-Proton Speicherring:

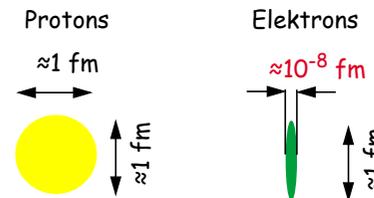
$$E_e = 27.5 \text{ GeV} \quad E_p = 920 \text{ GeV}$$

$$m_e = 511 \text{ keV} \quad m_p = 938 \text{ MeV}$$



\Rightarrow Im Ruhesystem des Elektrons bewegt sich das Proton mit $\gamma \approx 10^8 \Rightarrow d_p = d'_p / \gamma$

Proton-Dimensionen im Ruhesystem des



Muonen der kosmischen Höhenstrahlung entstehen in Pionzerfällen in der Atmosphäre:

Masse: $m_\mu = 0.106 \text{ GeV}$
 Typische Energie: $\langle E_\mu \rangle = 2 \text{ GeV}$

$\Rightarrow \gamma \approx 20$; $\beta \approx 0.999$

Im Ruhesystem des Muons beträgt die mittlere Lebensdauer: $\langle \tau_\mu \rangle = 2.2 \mu\text{s}$

Mittlere Flugstrecke in der Atmosphäre:

$$L = \langle \tau_\mu \rangle \beta c \gamma = 2.2 \mu\text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20 = 13 \text{ km}$$

und können damit die Erdoberfläche erreichen bevor sie gemäß $\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu$ zerfallen. (Dicke der Atmosphäre $\approx 10 \text{ km}$)

Vierervektoren

Jeder Raum-Zeitpunkt lässt sich durch die vier Zeit- und Orts-Komponenten $\underline{x} \equiv (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x})$ charakterisieren. Eine Lorentz Transformation entlang der x-Achse

lässt sich dann schreiben als: $\underline{x}' = \Lambda \underline{x} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Allgemein bezeichnet man jedes vierkomponentiges Objekt, dass sich wie \underline{x} transformiert, wenn man von einem Inertialsystem in ein anderes übergeht, als einen **Vierervektor**.

Metrik: $g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **Skalarprodukt:** $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_0 y_0 - (\vec{x} \cdot \vec{y}) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$

ist invariant unter Lorentz Transformationen (d.h. $\underline{x}' \cdot \underline{y}' = \Lambda \underline{x} \cdot \Lambda \underline{y} = \underline{x} \cdot \underline{y}$)

Vierergeschwindigkeit, Energie und Impuls

Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ kann keine Raumkomponente eines Vierervektors sein, da dies zwar für $d\vec{x}$ gilt, aber $dt = \gamma dt'$

Betrachte stattdessen $\frac{d\vec{x}}{d\tau}$ mit $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$, der **Eigenzeit** im Ruhesystem des Teilchens.

$\rightarrow \eta = \gamma(c, \vec{v})$ ist **Vierergeschwindigkeit** und eine Lorentzinvariante Größe:
 $\eta \cdot \eta = \gamma^2(c^2 - \beta^2 c^2) = c^2(1 - \beta^2)\gamma^2 = c^2$

Viererimpuls: $\underline{p} = m \cdot \eta = m\gamma(c, \vec{v}) = mc\gamma(1, \vec{\beta})$

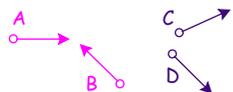
Grenzfall: $\beta \rightarrow 0 \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 + \beta^2/2 + \dots = 1 + v^2/(2c^2) + \dots$

damit gilt: $m \cdot c \cdot \gamma \rightarrow \frac{1}{c} \left[mc^2 + \frac{m}{2} v^2 + \dots \right] \equiv \frac{E}{c}$ Energie E

Ruheenergie kinetische Energie

\rightarrow Übliche Schreibweise für Viererimpulses: $\underline{p} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$

Kinematik von Teilchenreaktionen



Klassische Stöße

1. Masse bleibt erhalten: $m_A + m_B = m_C + m_D$
2. Impuls bleibt erhalten: $p_A + p_B = p_C + p_D$
3. Kinetische Energie bleibt erhalten oder nicht

Stoßarten (klassisch)

- a. *Klebrig*: kinetische Energie nimmt ab:
 $T_A + T_B > T_C + T_D$
- b. *Explosiv*: kinetische Energie nimmt zu:
 $T_A + T_B < T_C + T_D$
- c. *Elastisch*: kinetische Energie bleibt gleich:
 $T_A + T_B = T_C + T_D$

- kinetische Energie \Leftrightarrow "innere" Energie (Wärme, potentielle Energie ...)

Relativistische Stöße

1. Energie bleibt erhalten: $E_A + E_B = E_C + E_D$
2. Impuls bleibt erhalten: $p_A + p_B = p_C + p_D$ 4er-Impuls
3. Kinetische Energie bleibt erhalten oder nicht

Stoßarten (relativistisch)

- a. *Klebrig*: kinetische Energie nimmt ab, Ruheenergie und Masse nehmen zu
- b. *Explosiv*: kinetische Energie nimmt zu, Ruheenergie und Masse nehmen ab
- c. *Elastisch*: kinetische Energie, Ruheenergie und Masse bleiben erhalten

- kinetische Energie \Leftrightarrow Ruheenergie (Masse der Teilchen ist nicht erhalten, d.h. Teilchen können erzeugt/vernichtet werden)

Laborsystem vs Schwerpunktsystem

Der Ausdruck $s = (p_1 + p_2)^2$ ist invariant:

Im Laborsystem: $p_2 = (m_2, \vec{0})$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2$$

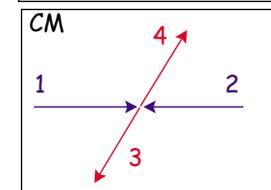
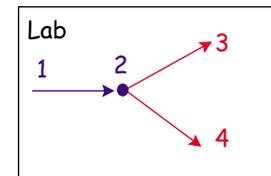
Im Schwerpunktsystem (CM System): $\vec{p}^*_1 + \vec{p}^*_2 = 0$

$$s = (p^*_1 + p^*_2)^2 = (E^*_1 + E^*_2, \vec{p}^*_1 + \vec{p}^*_2)^2 = (E^*_1 + E^*_2)^2$$

Reaktionsschwelle für die Reaktion: $1+2 \rightarrow 3+4$ im

Laborsystem: $(\sqrt{s} > m_3 + m_4)$

$$E_1 > \frac{(m_3 + m_4)^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}$$



Fixed Target vs Collider

Wievelfach höher müsste die Strahlenergie sein, wenn statt eines Colliders ein Fixed Target Experiment bei der gleichen Schwerpunktsenergie durchgeführt werden sollte?

$$s_{\text{Collider}} = 4E_{\text{Collider}}^2 \equiv s_{\text{FixedTarget}} = 2m_{\text{Beam}}^2 + 2E_{\text{FixedTarget}} m_{\text{Beam}}$$

$$\frac{E_{\text{FixedTarget}}}{E_{\text{Collider}}} = \frac{2E_{\text{Collider}}}{m_{\text{Beam}}}$$

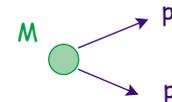
Collider	m_{Beam} (GeV)	E_{Collider} (GeV)	$E_{\text{FixedTarget}}$ (GeV)	Ratio
Tevatron ($p\bar{p}$)	1	1000	2×10^6	2×10^3
LHC (pp)	1	7000	9.8×10^7	1.4×10^4
LEP (e^+e^-)	0.5×10^{-3}	100	4×10^7	4×10^5

Weitere Beispiele

1) Kinematik des Zweikörperzerfalls:

$$M \rightarrow m_1 + m_2$$

Vierer-Impulserhaltung:
 $P = p_1 + p_2$



$$p^2 = M^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2\vec{p}_1 \vec{p}_2$$

Im Schwerpunktsystem gilt:

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}^*| \quad \cos \theta^* = -1 \Rightarrow$$

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^* E_2^* + 2|\vec{p}^*|^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^* \sqrt{E_1^{*2} - m_1^2 + m_2^2} + 2(E_1^{*2} - m_1^2)$$

$$\Rightarrow E_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$$

2) Produktion von Antiprotonen:

Das Bevatron in Berkeley wurde gebaut, um über die Reaktion $p+p \rightarrow p+p+p+\bar{p}$ Antiprotonen zu erzeugen. Wie groß ist die Schwellenenergie für diesen Prozess? Diese ist dann erreicht, wenn im CM-System gerade alle 4 Teilchen ruhen.

Lab-System: $p_{\text{tot}}^{\text{Lab}} = (E + m, |\vec{p}|, 0, 0)$

CM-System: $p_{\text{tot}}^{\text{CM}} = (4m, 0, 0, 0)$

Invarianz des Skalarproduktes:

$$p_{\text{tot}}^{\text{Lab}} p_{\text{tot}}^{\text{Lab}} = p_{\text{tot}}^{\text{CM}} p_{\text{tot}}^{\text{CM}} \Rightarrow$$

$$(E + m)^2 - |\vec{p}|^2 = (4m)^2 \Rightarrow E = 7m$$

(Es muss auch Energie aufgewendet werden für die kinetische Energie im Lab System!)

Wirkungsquerschnitt

Charakterisiert die Stärke einer Teilchenreaktion

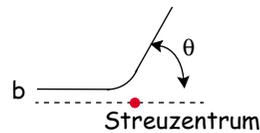
Klassisches Bild:

- Treffwahrscheinlichkeit \leftrightarrow Querschnittsfläche des Ziels

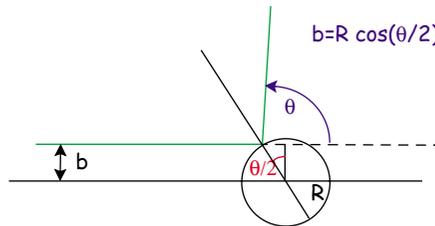
Teilchenphysik:

- "weiches" Ziel \Rightarrow Ablenkung des einlaufenden Teilchens
- Teilchenproduktion \Rightarrow inelastischer Wirkungsquerschnitt

$\theta(b)$ hängt von dem Potentialverlauf ab



Beispiel 1: Streuung an harter Kugel



Beispiel 2: Streuung am $1/r$ Potential

$$b = q_1 q_2 / 2E \cot(\theta/2)$$

Wirkungsquerschnitt

- "Eintrittsfläche" für einlaufende Teilchen :

$$d\sigma = b \cdot db \, d\phi$$

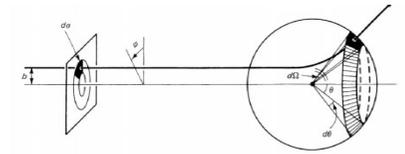
- auslaufende Teilchen gehen durch Raumwinkelement: $d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \, d\phi$

- Zusammenhang zwischen Eintrittsfläche und Raumwinkelement: $d\sigma = D(\theta, \phi) \cdot d\Omega$

- den Proportionalitätsfaktor $|D(\theta, \phi)| = \frac{d\sigma}{d\Omega}$ nennt man den **differentiellen Wirkungsquerschnitt**

- **totaler Wirkungsquerschnitt:**

$$\sigma_{tot} = \int |D(\theta, \phi)| \, d\Omega$$



Beispiel harte Kugel: (Problem ist Φ symmetrisch)

$$D(\theta) = \frac{b \cdot db}{\sin \theta \cdot d\theta} = \frac{-R \cos(\theta/2) R \sin(\theta/2)}{\sin \theta} = \frac{-R^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}; \quad \frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\sigma_{tot} = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = \pi R^2$$

= Projektionsfläche

Beispiel Rutherford Streuung

$$\sigma_{tot} = 2\pi \left(\frac{eq}{4E} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(\sin(\theta/2))^4} d\theta \rightarrow \infty$$

Wegen der unendlichen Reichweite des Coulombpotentials findet im Prinzip auch bei beliebig grossen Stoßparametern noch eine Streuung statt und der Wirkungsquerschnitt divergiert.

Bei jedem in der Realität stattfindenden Experiment gibt es aber eine prinzipiell eine Grenze für die Auflösung mit der man den Streuwinkel messen kann (Cut-off), Daher ist der gemessene Wirkungsquerschnitt endlich.

Experimentelle Bestimmung eines WQ

Beispiel Fixed Target-Experiment:

$\frac{dn_1}{dt}$ Anzahl der einlaufenden Teilchen pro Zeiteinheit

Dichte der Targetteilchen: $n_2 = \frac{N_A [\#/mol]}{A [g/mol]} \rho [g/cm^3] \quad \left[\frac{\#}{cm^3} \right]$

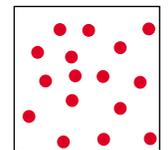
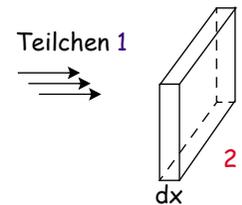
(wobei N_A = Avogadro-Zahl, A = Molgewicht)

Zahl der Wechselwirkungen/Zeit (dünnes Target):

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dn_1}{dt} n_2 dx \sigma \rightarrow \sigma \text{ hat die Dimension einer Fläche}$$

Geometrisch kann man sich $n_2 dx \sigma$ als den Anteil der projizierte Querschnittsfläche aller Targetteilchen an der Gesamtfläche vorstellen, d.h. es gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Strahlteilchen auf ein Targetteilchen trifft (**Wechselwirkungswahrscheinlichkeit**)

Übliche Einheit für σ ist das **barn** = $b = 10^{-28} m^2$



Abschwächung eines Teilchenstrahls

- Für einen stark wechselwirkenden Protonstrahl erscheint das Proton als eine absorbierende Scheibe mit $r \approx 1.2 \text{ fm} \Rightarrow \sigma \approx (1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2 \pi \approx 45 \text{ mb}$
- zum Vergleich schwache WW $\nu+p$: $\sigma_{\nu p}(10 \text{ GeV}) \approx 70 \text{ fb}$

Abschwächung eines Teilchenstrahls beim Durchgang durch Materie:

$$dN_1(x) = -N_1(x) \cdot n_2 \cdot dx \cdot \sigma \Rightarrow N_1(x) = N_1(0) \exp(-n_2 \sigma x) = N_1(0) \exp(-x/l)$$

mit $l = \frac{1}{n_2 \sigma} = \frac{A}{N_A \sigma} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\lambda}{\rho}$ **mittlere freie Weglänge** zwischen zwei Wechselwirkungen

für den totalen WQ σ_{tot} : λ_T collision length

für den inelastischen WQ $\sigma_{\text{inel}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{el}}$: λ_I interaction length

$\mu_I = 1/\lambda_I$ wird auch als **Absorptionskoeffizient** bezeichnet

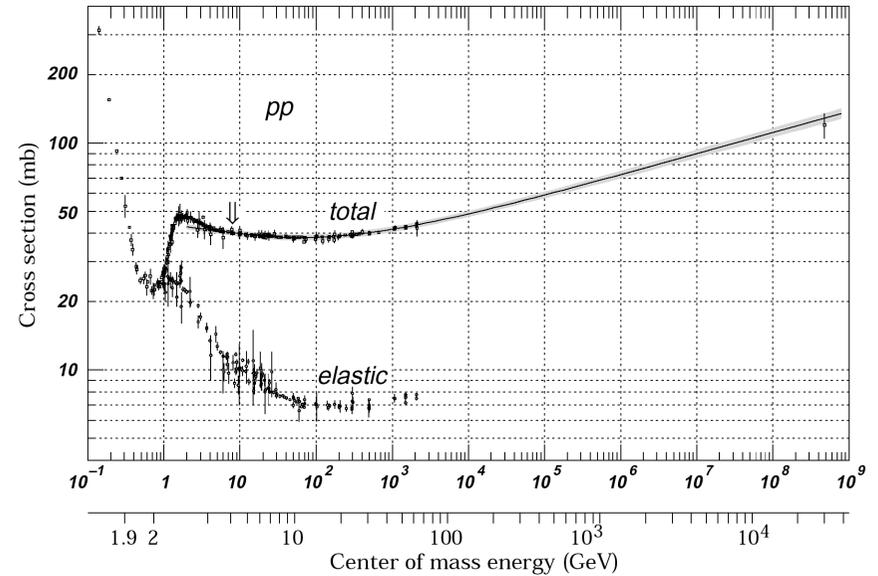
Typische Werte für Protonen in:

flüssigem Wasserstoff: $l = \frac{\lambda_T}{\rho} = \frac{43.3}{0.07} = 620 \text{ cm}$ und in Blei: $l = \frac{\lambda_T}{\rho} = \frac{116.2}{11.35} = 10.2 \text{ cm}$

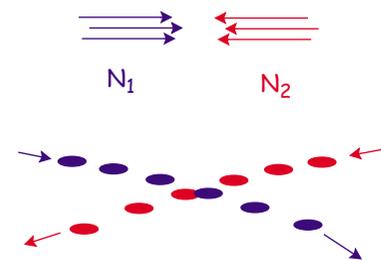
Eigenschaften von Materialien (PDG)

Material	Z	A	$\langle Z/A \rangle$	Nuclear collision length λ_I {g/cm ² }	Nuclear interaction length λ_I {g/cm ² }	Nuclear $dE/dx _{\text{min}}$ {MeV/g/cm ² }	Radiation length X_0 {g/cm ² }	Density {g/cm ³ } for gas	Liquid boiling point at 1 atm(K)	Refractive index n ((n-1) × 10 ⁶) for gas	
H ₂ gas	1	1.00794	0.99212	43.3	50.8	(4.103)	61.28 ^d (731000)	(0.0838)[0.0899]	—	[139.2]	
H ₂ liquid	1	1.00794	0.99212	43.3	50.8	4.034	61.28 ^d	866	0.0708	20.39	1.112
D ₂	1	2.0140	0.49652	45.7	54.7	(2.052)	122.4	724	0.169[0.179]	23.65	1.128 [138]
He	2	4.002602	0.49968	49.9	65.1	(1.937)	94.32	756	0.1249[0.1786]	4.224	1.024 [34.9]
Li	3	6.941	0.43221	54.6	73.4	1.639	82.76	155	0.534	—	—
Be	4	9.012182	0.44384	55.8	75.2	1.594	65.19	35.28	1.848	—	—
C	6	12.011	0.49954	60.2	86.3	1.745	42.70	18.8	2.265 ^e	—	—
N ₂	7	14.00674	0.49976	61.4	87.8	(1.825)	37.99	47.1	0.8073[1.250]	77.36	1.205 [298]
O ₂	8	15.9994	0.50002	63.2	91.0	(1.801)	34.24	30.0	1.141[1.428]	90.18	1.22 [296]
F ₂	9	18.9984032	0.47372	65.5	95.3	(1.675)	32.93	21.85	1.507[1.696]	85.24	[195]
Ne	10	20.1797	0.49555	66.1	96.6	(1.724)	28.94	24.0	1.204[0.9005]	27.09	1.092 [67.1]
Al	13	26.981539	0.48181	70.6	106.4	1.615	24.01	8.9	2.70	—	—
Si	14	28.0855	0.49848	70.6	106.0	1.664	21.82	9.36	2.33	3.95	—
Ar	18	39.948	0.45059	76.4	117.2	(1.519)	19.55	14.0	1.396[1.782]	87.28	1.233 [283]
Ti	22	47.867	0.45948	79.9	124.9	1.476	16.17	3.56	4.54	—	—
Fe	26	55.845	0.46556	82.8	131.9	1.451	13.84	1.76	7.87	—	—
Cu	29	63.546	0.45636	85.6	134.9	1.403	12.86	1.43	8.96	—	—
Ge	32	72.61	0.44071	88.3	140.5	1.371	12.25	2.30	5.323	—	—
Sn	50	118.710	0.42120	100.2	163	1.264	8.82	1.21	7.31	—	—
Xe	54	131.29	0.41130	102.8	169	(1.255)	8.48	2.87	2.953[5.858]	165.1	[701]
W	74	183.84	0.40250	110.3	185	1.145	6.76	0.35	19.3	—	—
Pt	78	195.08	0.39984	113.3	189.7	1.129	6.54	0.305	21.45	—	—
Pb	82	207.2	0.39575	116.2	194	1.123	6.37	0.56	11.35	—	—
U	92	238.0289	0.38651	117.0	199	1.082	6.00	≈0.32	≈18.95	—	—

Proton-Proton Wirkungsquerschnitt



Speicherring Experiment: Luminosität



In den meisten Fällen sind die Strahlen in Teilchenpakete gebündelt.

N_1, N_2 Anzahl der Teilchen pro Paket

f Frequenz mit der Pakete aufeinandertreffen

$$\frac{dN}{dt} = \sigma \cdot \frac{N_1 N_2 f}{A_{\text{eff}}} \text{ mit } A_{\text{eff}} \text{ effektiver Überlapp}$$

$L = \text{Luminosität [1/(Fläche x Zeit)] [pb}^{-1}\text{s}^{-1}\text{]}$

$A_{\text{eff}} = 4\pi \sigma_x \sigma_y$ wenn Teilchenstrahlen Gaußförmig

wichtige Größe für ein Experiment ist seine **integrierte Luminosität**: $\int L dt$ Δt -Experiment

Bedeutung: für eine Prozess mit dem Wirkungsquerschnitt σ ergibt sich die Gesamtzahl, der während der Experimentierzeit Δt zu erwartenden Ereignisse = $\sigma \int L dt$ Δt -Experiment

Quantenmechanische Berechnung von Übergangsraten

Für Teilchenzerfälle muß die **Zerfallsrate** Γ , für Teilchenreaktionen der **Streuquerschnitt** σ berechnet werden. Dies erfordert die Kenntnis

1. der Amplitude für den Prozess (Dynamik = enthält die "Physik")
2. des verfügbaren Phasenraums (Kinematik = f(Massen, Energien...)

Nach Fermi's "**Goldenen Regel**" ist die Übergangsrates für einen gegebenen Prozess durch die Amplitude $M(a \rightarrow b)$ und den Phasenraumfaktor $\rho(E)$ bestimmt:

$$\text{Übergangsrates} = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \times \rho(E)$$

Herleitung:
Zeitunabhängige Schrödingergleichung mit dem Hamilton-Operator H_0 für stationäre Zustände

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}_0 \psi$$

Mit dem Ansatz:

$$\psi = u_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar}$$

erhält man die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\mathcal{H}_0 u_n = E_n u_n$$

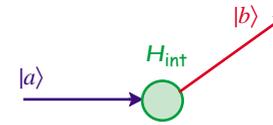
mit den Eigenfunktionen u_n , die ein Orthonormalsystem bilden:

$$\int u_m^* u_n d\vec{r} = \delta_{nm}$$

Ist das System in einem Eigenzustand u_n mit dem Eigenwert E_n , so bleibt es in diesem Zustand. Übergänge zu anderen Zuständen finden in diesem Fall nicht statt.

Herleitung von Fermi's Goldenen Regel (1)

Das System wird nun durch eine Wechselwirkung "gestört"



Der Gesamt-Hamiltonoperator ist für die Dauer der Wechselwirkung durch $H = H_0 + H_{int}$ gegeben und bewirkt Übergang

z.B. in den Zustand $|b\rangle$. Ansatz für Lösungen der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}) \psi$$

als Entwicklung nach den ungestörten Eigenfunktionen:

$$\psi = \sum_n c_n(t) u_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

Die Koeffizienten $c_n(t)$ sind zeitabhängig. $|c_n(t)|^2$ ist Wahrscheinlichkeit das System zur Zeit t im Zustand n mit der Energie E_n zu finden. Einsetzen des Ansatzes in die SG:

$$i\hbar \sum_n \dot{c}_n u_n e^{-iE_n t/\hbar} + \sum_n E_n c_n u_n e^{-iE_n t/\hbar} = \Rightarrow$$

$$= \sum_n c_n (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}) u_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$i\hbar \sum_n \dot{c}_n u_n e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_n c_n \mathcal{H}_{int} u_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

Multiplizieren mit u_m^* und Integration ergibt

$$i\hbar \dot{c}_m = \sum_n \langle m | \mathcal{H}_{int} | n \rangle c_n e^{i(E_m - E_n)t/\hbar} \quad \text{mit}$$

$$\langle m | \mathcal{H}_{int} | n \rangle = \int u_m^*(\vec{r}) \mathcal{H}_{int} u_n(\vec{r}) d\vec{r}$$

Herleitung von Fermi's Goldenen Regel (2)

Suche Näherungslösung unter der Annahme, dass sich das System zunächst im Anfangszustand $|a\rangle$ befindet. Für $t < t_0$ gilt

$$c_a(t) = 1 \quad c_n(t) = 0 \quad \text{für } n \neq a$$

Ist die Störung nur schwach, so treten während der Beobachtungszeit nur wenige Übergänge auf \Rightarrow für $t \gg t_0$

$$c_a(t) \approx 1 \quad c_n(t) \ll 1 \quad \text{für } n \neq a$$

Damit ergibt sich vereinfachte Gleichung

$$\dot{c}_m = \frac{1}{i\hbar} \langle m | \mathcal{H}_{int} | a \rangle e^{i(E_m - E_a)t/\hbar}$$

Wird die Störung zur Zeit t_0 eingeschaltet und bleibt danach konstant, ergibt die Integration für $m \neq a$ bis zur Zeit $t = T$

$$c_m = \frac{1}{i\hbar} \langle m | \mathcal{H}_{int} | a \rangle \int_0^T e^{i(E_m - E_a)t/\hbar} dt = .$$

$$= \frac{\langle m | \mathcal{H}_{int} | a \rangle}{E_m - E_a} [1 - e^{i(E_m - E_a)T/\hbar}]$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, das System nach einer Zeit T in einem bestimmten Zustand m zu finden durch $|c_m(T)|^2$ gegeben:

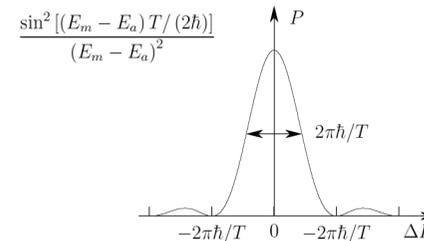
$$P_{ma}(T) = c_m^*(T) c_m(T) =$$

$$= 4 \left| \langle m | \mathcal{H}_{int} | a \rangle \right|^2 \frac{\sin^2 [(E_m - E_a)T / (2\hbar)]}{(E_m - E_a)^2}$$

\Rightarrow stark Energieabhängige Unterdrückung der Zustände als Funktion von $\Delta E = E_m - E_a$

Herleitung von Fermi's Goldenen Regel (3)

Energieabhängigkeit:



1. Wenn $\Delta E = E_m - E_a$ groß können Übergänge in solche Zustände vernachlässigt werden
2. Wenn $\Delta E = E_m - E_a$ klein kann man die Näherung

$$\langle m | \mathcal{H}_{int} | a \rangle \rightarrow \langle b | \mathcal{H}_{int} | a \rangle$$

introduzieren.

3. Nur in dem Intervall $\pm \Delta E = 2\pi\hbar/T$ ist die Übergangswahrscheinlichkeit nennenswert von Null verschieden, wie von der Heisenberg'schen Unschärferelation beschrieben.

Um die totale Übergangswahrscheinlichkeit zu erhalten muss nun über alle möglichen Endzustände summiert werden:

$$P(T) = \sum_m P_{ma} = 4 \left| \langle b | \mathcal{H}_{int} | a \rangle \right|^2 \sum_m \frac{\sin^2 [(E_m - E_a)T / (2\hbar)]}{(E_m - E_a)^2}$$

(gültig für $\Delta E / E_a \ll 1$, was erfüllt ist für:

$$T \gg \frac{2\pi\hbar}{E_a} \approx \frac{4 \times 10^{-21} \text{ sec}}{E_a [\text{in MeV}]}$$

Grenzübergang von diskreten Zuständen zum Kontinuum:

$$\sum_m \dots \rightarrow \int \dots dN \quad \Rightarrow$$

$$P(T) = 4 \left| \langle b | \mathcal{H}_{int} | a \rangle \right|^2 \int \frac{\sin^2 [(E(N) - E_a)T / (2\hbar)]}{(E(N) - E_a)^2} dN$$

Mit der Variablentransformation:

$$x = \frac{(E(N) - E_a)T}{2\hbar} \quad dN = \frac{dN}{dE} dE = \frac{2\hbar}{T} \frac{dN}{dE} dx$$

Herleitung von Fermi's Goldenen Regel (4)

Zur Berechnung werden die Integrationsgrenzen nach $\pm\infty$ ausgedehnt. Damit wird die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P(T) = 4 |\langle b | \mathcal{H}_{\text{int}} | a \rangle|^2 \frac{dN}{dE} \frac{T}{2\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

$$\Rightarrow P(T) = \frac{2\pi T}{\hbar} |\langle b | \mathcal{H}_{\text{int}} | a \rangle|^2 \frac{dN}{dE}$$

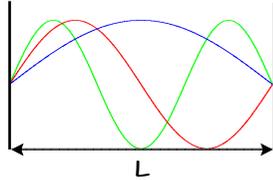
Die Übergangswahrscheinlichkeit ist proportional zur Zeit T. Die Übergangsrate w_{ba} zwischen den Zuständen a und b ist $P(T)/T$ und es ergibt sich die goldene Regel:

$$w_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle b | \mathcal{H}_{\text{int}} | a \rangle|^2 \frac{dN}{dE}$$

mit dem Phasenraumfaktor dN/dE (oder auch Zustandsdichte: Anzahl der verfügbaren Zustände pro Energieintervall)

Zustandsdichte im Phasenraum:

Ein-dimensional: de Broglie Wellenlänge $\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p \rightarrow 2\pi/p$ erlaubte Zustände: $\lambda_n = 2\pi/p_n$ mit $\lambda_n/2 \cdot n = L$ (L muss ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge sein) $\Rightarrow p_n = \pi \cdot n / L$



$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin p_n x \rightarrow \int_0^L \Psi_n \Psi_m dx = \delta_{nm}$$

Zustandsdichte im 3-dimensionalen Phasenraum

Drei-dimensional:

In einem Kasten des Volumens $V=L^3$ werden die periodischen Randbedingungen erfüllt, wenn jeweils $L p_{x/y/z} = 2\pi n_{x/y/z}$. Daher ist die Zahl der erlaubten Zustände im Intervall $p_{x/y/z}$ bis $p_{x/y/z} + dp_{x/y/z}$ gegeben durch $L dp_{x/y/z} / (2\pi)$

Relativistische Wellenfunktionen werden i.a. so normiert, daß die Dichte $2E/V$ ist, wobei das Normierungsvolumen bei Berechnung von physikalischen Größen wie Wirkungsquer-schnitten herausfällt. Damit erhält man den lorentzinvarianten Ausdruck:

$$\text{Zahl der Endzustände/Teilchen} = \frac{V d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 \cdot 2E}$$

Für n-Teilchen-Zuständen ergibt sich die Zahl der verfügbaren Zustände als Produkt der Ein-Teilchen-Ausdrücke:

$$d\Phi(P_a + P_b, P_1, P_2, \dots) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1 + P_2 + \dots + P_n - P_a - P_b) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 \cdot 2E_i}$$

dabei gewährleistet die Deltafunktion Energie- und Impulserhaltung.

Anwendung: Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

Im Schwerpunktsystem des π^0 gilt für den Vierervektor $P=(M,0,0,0) \Rightarrow$ für die Deltafunktion:

$$\delta^4(P - p_1 - p_2) \rightarrow \delta(M - E_1 - E_2) \delta^3(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$$

Wegen $m_1=m_2=0$ folgt:

$$E_1 = |\vec{p}_1| \text{ und } E_2 = |\vec{p}_2|$$

Damit ergibt sich für die Zerfallsrate Γ durch Integration über die Impulse:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \frac{1}{4} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|} \delta(M - |\vec{p}_1| - |\vec{p}_2|) \delta(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2) d^3 p_1 d^3 p_2 \\ &= \frac{1}{2M (2\pi)^2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{p}_1|^2} \delta(M - 2|\vec{p}_1|) d^3 p_1 \end{aligned}$$

Da das π^0 Spin=0 hat kann das Matrixelement nur vom Betrag des Impulses abhängen:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M (4\pi)^2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{p}_1|^2} \delta(M - 2|\vec{p}_1|) \cdot 4\pi |\vec{p}_1|^2 dp_1 \\ &= \frac{1}{8\pi M} \int |\mathcal{M}|^2 \delta(M - 2|\vec{p}_1|) dp_1 \quad \text{mit} \quad \delta(M - 2|\vec{p}_1|) = \frac{1}{2} \delta\left(\frac{M}{2} - |\vec{p}_1|\right) \end{aligned}$$

Daraus erhält man die Zerfallsrate:

$$\Gamma = \frac{1}{16\pi M} |\mathcal{M}|^2$$

Flußfaktor und Wirkungsquerschnitt

Flußfaktor:

Produkt aus dem Fluß der einlaufenden Teilchen und der Dichte der Targetteilchen

$$j_a = \frac{|\vec{v}|}{V/(2E_a)} \quad \rho_b = \frac{2E_b}{V}$$

Als Lorentzinvarianter Ausdruck:

$$F = |\vec{v}| \frac{4E_a E_b}{V^2} = \frac{4}{V^2} \sqrt{(P_a \cdot P_b)^2 - m_a^2 m_b^2}$$

Es genügt das im Laborsystem zu zeigen:

$$\sqrt{(P_a \cdot P_b)^2 - m_a^2 m_b^2} = \sqrt{E_a^2 - m_a^2} m_b = |\vec{v}| E_a m_b$$

Damit gilt mit für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\mathcal{M} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle$$

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(P_1 P_2) - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}|^2 \times d\Phi(P_a + P_b, P_1, P_2, \dots)$$