

Aufbau der Hadronen aus Quarks

Henning Gast

Betreuer: Prof. G. Flügge

Wintersemester 2002/03

Zusammenfassung

In diesem Seminarvortrag beschäftige ich mich mit dem statischen Modell, das den Aufbau der Hadronen aus Quarks beschreibt, betrachte also keine Wechselwirkungen von Hadronen oder Quarks untereinander. Dazu gehe ich zunächst auf elementare Eigenschaften von Gruppen, insbesondere der $SU(3)$ ein und erkläre die dem Quarkmodell zugrunde liegende Symmetrie. Ich beschreibe ausführlicher die Entdeckung des Ω^- -Teilchens, dessen Existenz bei der Annahme der $SU(3)$ -Symmetrie voraus gesagt werden konnte. Abschließend behandle ich auch noch die Entdeckung der c - und b -Quarks.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Einige Begriffe aus der Gruppentheorie	3
2.1	Liegruppen	3
2.2	Die Gruppen $SU(n)$	3
2.3	Anwendung: Spin und $SU(2)$	4
3	Quantenzahlen von Elementarteilchen	5
3.1	Isospin	5
3.2	Parität	5
3.3	Strangeness	7
3.4	Hyperladung	8
3.5	Zusammenfassung	8
4	Die $SU(3)$-Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen	8
4.1	Fundamentale Darstellungen der $SU(3)$	8
4.2	Mesonen und Baryonen	10
4.2.1	Mesonen	11
4.2.2	Baryonen	13
4.3	Brechung der Symmetrie und Massenbeziehung	14
4.4	Die Farben der Quarks	14
5	Die Entdeckung des Ω^--Teilchens	15
6	Die Entdeckung der charm- und bottom-Quarks	16
6.1	Das c -Quark	16
6.2	Das b -Quark	17
7	Schlusswort	18
	Literatur	19

1 Einführung

Zu Beginn des letzten Jahrhunderts kannte man nur zwei elementare Teilchen, aus denen man sich die gesamte Materie aufgebaut dachte, nämlich das Elektron und das Proton. Im Jahre 1932 wurden dann das Neutron und das Positron entdeckt, die beide zuvor postuliert worden waren. 1946 fanden Powell u.a. das Pion in der kosmischen Strahlung. Mit der Entwicklung der Teilchenbeschleuniger, die Teilchen auf immer größere Energien bringen konnten, stieg die Zahl der in der Folgezeit entdeckten Materiebausteine stark an, man konnte Antiprotonen und Kaonen erzeugen und fand, zum Teil auch in der kosmischen Strahlung, Λ -, Σ - und Ξ -Hyperonen. Diese Teilchen ordnete man zunächst nach ihrer Masse in leichte, mittelschwere und schwere Teilchen, die Leptonen, Mesonen und Baryonen. Die letzten beiden fasst man zur Gruppe der Hadronen zusammen, sie hat die weitaus größte Zahl an Mitgliedern, während die Leptonen die drei Familien von Elektron und Neutrino umfassen. Diese werden bis heute als punktförmig angesehen. Wie sich später herausgestellt hat, nehmen Leptonen nur an der schwachen und, falls sie eine Ladung tragen, an der elektromagnetischen Wechselwirkung teil, während Mesonen und Baryonen auch der starken Kraft unterliegen. Mit den Hadronen werde ich mich im folgenden beschäftigen.

Um das Jahr 1964 war die Zahl der bekannten Elementarteilchen schon auf etwa 100 angewachsen. Die Frage nach einer zugrunde liegenden Ordnung für diesen Teilchenzoo beantworteten Gell-Mann und Zweig in jenem Jahr mit dem Quarkmodell, das zunächst eine ähnliche Leistung erbringt wie das Periodensystem der Elemente, zugleich aber auch den Schlüssel zu der inneren Struktur der Hadronen liefert und sie so als keineswegs elementar entblößt.

Zunächst sollen einige Eigenschaften von uns im folgenden besonders interessierenden Teilchen zusammen gefasst werden, siehe Tabelle 1. Dabei bezeichnen m die

Name	Symbol	m/MeV	τ/s	Q	J^P	I	I_3	S
Mesonen								
Pion	π^\pm	139,6	$2,6 \cdot 10^{-8}$	± 1	0^-	1	± 1	0
	π^0	135,0	$8,4 \cdot 10^{-17}$	0	0^-	1	0	0
Kaon	K^\pm	493,6	$1,24 \cdot 10^{-8}$	± 1	0^-	$\frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	± 1
	K_s^0	497,7	$0,89 \cdot 10^{-10}$	0	0^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
	K_L^0	497,7	$5,17 \cdot 10^{-8}$	0	0^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
Eta	η	548,8	$6,09 \cdot 10^{-19}$	0	0^-	0	0	0
Baryonen								
Nukleon	p	938,27	$> 10^{39}$	+1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0
	n	939,57	888,6	0	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Hyperonen	Λ	1115,6	$2,63 \cdot 10^{-10}$	0	$\frac{1}{2}^+$	0	0	-1
	Σ^+	1189,4	$8,0 \cdot 10^{-11}$	+1	$\frac{1}{2}^+$	1	+1	-1
	Σ^0	1192,5	$7,4 \cdot 10^{-20}$	0	$\frac{1}{2}^+$	1	0	-1
	Σ^-	1197,4	$1,48 \cdot 10^{-10}$	-1	$\frac{1}{2}^+$	1	-1	-1
	Ξ^0	1314,9	$2,90 \cdot 10^{-10}$	0	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-2
	Ξ^-	1321,3	$1,64 \cdot 10^{-10}$	-1	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
	Ω^-	1672,43	$8,22 \cdot 10^{-11}$	-1	$\frac{3}{2}^+$	0	0	-3

Tabelle 1: Eigenschaften einiger Elementarteilchen

Masse des Teilchens, τ seine Lebensdauer, Q seine Ladung und J seinen Spin. Auf die Bedeutung der restlichen Größen werde ich im folgenden noch eingehen.

2 Einige Begriffe aus der Gruppentheorie

2.1 Liegruppen

Wir werden sehen, dass wir uns bestimmte innere Symmetrien zu Nutze machen werden, um den Aufbau der Hadronen zu beschreiben. Die mathematische Behandlung von Symmetrien erfolgt im Rahmen der Gruppentheorie. Im folgenden interessieren uns solche Gruppen G , deren Elemente durch einen Satz von kontinuierlichen Parametern $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dargestellt werden können, $g(\vec{\alpha}) = g \in G$. Außerdem sollen die Gruppenelemente in der Nähe des Einselementes $g(0) := 1$ analytisch von den Parametern abhängen. Dann kann man entwickeln:

$$g(\delta\alpha) = 1 + i\delta\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\delta\alpha^2) \quad (1)$$

Dabei sind die T^a die **Generatoren** der Gruppe:

$$T^a = -i \frac{\partial g(\vec{\alpha})}{\partial \alpha^a} \Big|_{\vec{\alpha}=0} \quad (2)$$

Man kann nun zeigen, dass unter den obigen Voraussetzungen die Generatoren die Beziehung

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (3)$$

erfüllen, wobei die f^{abc} die **Strukturkonstanten** der Gruppe heißen. Der von den $\{T^a\}$ aufgespannte Vektorraum heißt zusammen mit der Beziehung (3) eine **Lie-Algebra**. Wir können nun ein Gruppenelement $g(\vec{\alpha})$ mit nicht-infinitesimalem $\vec{\alpha}$ rekonstruieren, indem wir die Abgeschlossenheit der Gruppe benutzen und von dem Einselement ausgehend n infinitesimale Schritte $\delta\vec{\alpha} = \frac{\vec{\alpha}}{n}$ gehen:

$$g(\vec{\alpha}) = g\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right) g\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right) \dots g\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right) = \left(g\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right)\right)^n = \left(1 + i\frac{1}{n}\alpha^a T^a\right)^n$$

Daraus folgt für $n \rightarrow \infty$

$$g(\vec{\alpha}) = e^{i\alpha^a T^a} \quad (4)$$

2.2 Die Gruppen $SU(n)$

Wir spezialisieren jetzt auf den Fall der Gruppen

$$SU(n) := \{U \in \mathbb{C}^{n \times n} | U^\dagger U = 1 \wedge \det U = 1\} \quad (5)$$

Um ihre Elemente zu generieren, schreiben wir sie in der Form $U = e^{iH}$. Wenn H eine hermitesche $n \times n$ -Matrix ist, ist somit automatisch $U^\dagger U = 1$ erfüllt. Um die zweite Bedingung $\det U = 1$ zu erfüllen, müssen wir uns überlegen, dass die Generatoren spurfrei sein müssen: $H = H^\dagger \Rightarrow \exists C \in GL(n, \mathbb{C}) : H = CDC^{-1}$, wobei $D = \text{diag}(d_1 \dots d_n)$ die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von H ist. Weiter ist $\det e^{iH} = \det e^{iCDC^{-1}} = \det(Ce^{iD}C^{-1}) = \det e^{iD} = \prod_j e^{id_j} = e^{i\sum_j d_j} = e^{i\text{Sp}D} = e^{i\text{Sp}H}$, da H und D ähnlich sind. Wir betrachten den \mathbb{R} -Vektorraum V mit

$$V := \{H \in \mathbb{C}^{n \times n} | H = H^\dagger \wedge \text{Sp}H = 0\} \quad (6)$$

und eine Basis $(H_i)_{i=1}^{\dim V}$ von V . Es gilt $\dim_{\mathbb{R}} V = \sum_{k=1}^{n-1} 2k + n - 1 = 2\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = n^2 - 1$ und mit $H = \sum_{j=1}^{n^2-1} \alpha_j H_j$ wird $U = e^{iH} \in SU(n)$. Also haben wir mit $n^2 - 1$ linear unabhängigen, hermiteschen und spurfreien $n \times n$ -Matrizen einen Satz von Generatoren der $SU(n)$ zur Hand.

2.3 Anwendung: Spin und $SU(2)$

Nach dem im letzten Abschnitt Gesagten ist einsichtig, dass die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

ein Satz von Generatoren der $SU(2)$ sind. Fassen wir sie als Operatoren auf dem Vektorraum \mathbb{C}^2 auf, so ist $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ eine Basis aus Eigenvektoren von σ_3 dieses Raums. Es ist allgemein bekannt, dass ein Teilchen mit Spin $S = \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}$ beschrieben werden kann durch eine Linearkombination der Zustände $|S = \frac{1}{2}, m_S = +\frac{1}{2}\rangle \equiv |\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|S = \frac{1}{2}, m_S = -\frac{1}{2}\rangle \equiv |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die die Spinprojektion bezüglich der z -Achse angeben. Aus den verbleibenden Matrizen $\sigma_{1/2}$ können wir Leiteroperatoren machen:

$$S_{\pm} = S_1 \pm iS_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} S_+|\uparrow\rangle &= 0 & S_-|\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle \\ S_+|\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle & S_-|\downarrow\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Wir verstehen nun unter einer **Darstellung** einer Gruppe G einen Gruppenhomomorphismus $D : G \rightarrow K^{n_D \times n_D}$, wobei K ein Körper ist, $n_D \in \mathbb{N}$. Ein **Multiplet** ist eine Basis von Zuständen, die einen Unterraum des (Hilbert-)Raums aufspannen, der invariant unter Anwendung der Operatoren einer Darstellung der betrachteten Symmetriegruppe ist. In unserem Beispiel bilden die Pauli-Matrizen die fundamentale Darstellung der $SU(2)$, das zugehörige Multiplet (hier: Dublett) ist $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, das man sich grafisch wie in Abbildung 1 zu sehen veranschaulichen kann. Dabei symbolisiert jeder Punkt einen Zustand und die Achse ist die m_S -Achse. Wir werden

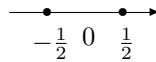


Abbildung 1: Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellung der $SU(2)$

uns im folgenden vor allem für die Multipletts interessieren, auf denen bestimmte Darstellungen wirken.

Ein wesentlicher Punkt ist jetzt, dass man durch Kombination zweier Darstellungen neue Darstellungen generieren kann. Am Beispiel der Kopplung zweier $S_i = \frac{1}{2}$ -Drehimpulse sei dies verdeutlicht. Aus der Quantenmechanik ist bekannt, dass man zwei solche Drehimpulse zu einem Gesamtdrehimpuls $S = 1$ mit $m_S \in \{+1, 0, -1\}$ oder $S = 0$ mit $m_S \in \{0\}$ koppeln kann:

$$\begin{aligned} |S = 1, m_S = +1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ |S = 1, m_S = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |S = 1, m_S = -1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \\ |S = 0, m_S = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned} \quad (9)$$

Man erhält also ein $S = 1$ -Triplet und ein $S = 0$ -Singulett. Auf grafischem Wege erhält man diese Lösung so, wie in Abbildung 2 dargestellt. Dabei werden die Zustände des einen Faktors als Nullpunkte genommen, an die dann jeweils der andere Faktor „angeheftet“ wird.

Bei der Zerlegung in Summanden nutzen wir aus, dass wir das Triplet in Abbildung 2 als zur Darstellung eines Teilchens mit Spin $S = 1$ zugehörig erkennen. Dabei stehen die Punkte für die ersten drei Zustände in (9), der Singulett-Zustand ist der vierte. Für diese Zerlegung schreibt man symbolisch

$$[2] \otimes [2] = [3] \oplus [1]$$

Dieses Verfahren werden wir später auf die $SU(3)$ verallgemeinern, um das Quarkmodell der Hadronen zu erhalten.

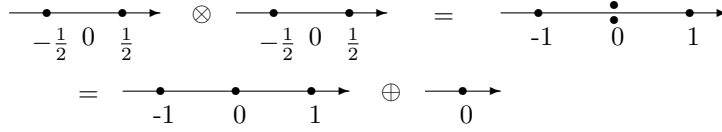


Abbildung 2: Kopplung zweier Spin $\frac{1}{2}$ -Darstellungen

3 Quantenzahlen von Elementarteilchen

Im folgenden werden die restlichen der in Tabelle 1 aufgeführten Quantenzahlen erläutert.

3.1 Isospin

Wir wissen, dass auf ein Elektron in einem elektrischen Feld die gleiche Kraft wirkt, egal ob es im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ ist. Die elektromagnetische Wechselwirkung unterscheidet also nicht zwischen diesen beiden Zuständen. Wenn wir jetzt aber einen Blick auf Tabelle 1 werfen, so stellen wir fest, dass Proton und Neutron nahezu die gleiche Masse haben. Offensichtlich zeigt sich hier eine innere Symmetrie der starken Wechselwirkung: Sie unterscheidet nicht zwischen Proton und Neutron. Das zeigt sich zum Beispiel auch beim Aufbau der Atomkerne. Erst durch ihre elektrische Ladung werden Proton und Neutron unterscheidbar. Wir fassen daher in völliger Analogie zur Beschreibung des Teilchenspins Proton und Neutron als zwei Zustände desselben Teilchens, das wir Nukleon nennen, auf und ordnen diesem einen **Isospin** von $I = \frac{1}{2}$ zu. Aus der Analogie zum Spin schließen wir, dass I ganze oder halbzahlige Werte annehmen kann, dass I^2 und die dritte Komponente I_3 simultan diagonalisierbar sind, wobei I_3 die Werte $-I, -I + 1, \dots, I - 1, I$ annehmen kann, und dass für die einzelnen Komponenten von I die Vertauschungsrelation $[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k$ gilt.

So bilden also Proton und Neutron ein Isospindublett, wobei wir die Identifizierung

$$|p\rangle \equiv |I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2}\rangle \quad |n\rangle \equiv |I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}\rangle \quad (10)$$

vornehmen. Hiervon ermutigt stellen wir mit Blick auf Tabelle 1 fest, dass auch die drei Pionen fast gleich schwer sind. Wir fassen sie also als drei Zustände des Teilchens „Pion“ mit Isospin $I = 1$ auf:

$$|\pi^+\rangle \equiv |I = 1, I_3 = +1\rangle \quad |\pi^0\rangle \equiv |I = 1, I_3 = 0\rangle \quad |\pi^-\rangle \equiv |I = 1, I_3 = -1\rangle \quad (11)$$

Es soll noch einmal betont werden, dass wir unter einem Isospinmultipllett eine Gruppe von Teilchen zusammenfassen, die uns aufgrund ihrer Eigenschaften „verwandt“ erscheinen.

Wenn wir den Mesonen eine **Baryonenzahl** $B = 0$ und den Baryonen $B = 1$ zuzuordnen, können wir aus der dritten Komponente des Isospins eines Teilchens seine Ladung rekonstruieren:

$$Q = e \left(I_3 + \frac{B}{2} \right)$$

3.2 Parität

Der **Paritätsoperator** P spiegelt die räumlichen Koordinaten: $P|\vec{r}\rangle = |-\vec{r}\rangle$. Zum Beispiel gilt für die Kugelfunktionen Y_l^m :

$$PY_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi) \quad (12)$$

Aus der Definition von P folgt $P^2 = 1$, also kann P nur die Eigenwerte ± 1 haben. Wenn immer das Verhalten eines Systems invariant unter der Raumspiegelung ist, vertauscht sein Hamiltonoperator H mit P : $[H, P] = 0$. Da in der Quantenmechanik Zustände durch unitäre Operatoren transformiert werden, sollte auch P unitär sein, insbesondere also auch hermitesch. Dann beschreibt P aber eine Messgröße, d.h. die Parität ist eine intrinsische Eigenschaft eines Teilchens. So wie die Ladung eines Elektrons zu $-e$ festgelegt wird, einigt man sich auf die Parität $+1$ für Protonen und Neutronen. Es zeigt sich, dass die Parität eine multiplikative Quantenzahl ist, die von starker und elektromagnetischer Wechselwirkung erhalten, von der schwachen aber verletzt wird.

Historischer Exkurs: Blasenkammern

Die im Jahr 1952 von Glaser erfundene Blasenkammer gehörte über Jahrzehnte zu den wichtigsten Instrumenten der Teilchenphysik. Sie besteht aus einem Gefäß, das zum Beispiel mit Wasserstoff einer Temperatur T gefüllt ist, dessen Druck p knapp über dem Dampfdruck $p_s(T)$ gehalten wird, so dass sich die Flüssigkeit dicht unter dem Siedepunkt befindet. Durch ein dünnes Metallfenster können zuvor beschleunigte Teilchen eintreten. Der Wasserstoff wird nun periodisch durch einen Kolben expandiert, wodurch er überhitzt wird, das heißt seine Temperatur liegt wegen des gefallenen Drucks plötzlich über der Siedetemperatur. Der entscheidende Effekt ist hierbei, dass die Gasblasenbildung Kondensationskeime benötigt, die gerade durch die von den durchfliegenden Teilchen erzeugte Ionisation geliefert werden. Geladene Teilchen erzeugen in der Blasenkammer also Spuren. Nachdem die Blasen etwa 10 ms gewachsen sind, wird das Kammerbild geeignet beleuchtet und von verschiedenen Kameras in Stereo fotografiert. Der gesamte Zyklus dauert etwa 1 s . Eine schematische Darstellung einer Blasenkammer ist in Abbildung 3 zu sehen. Bei s

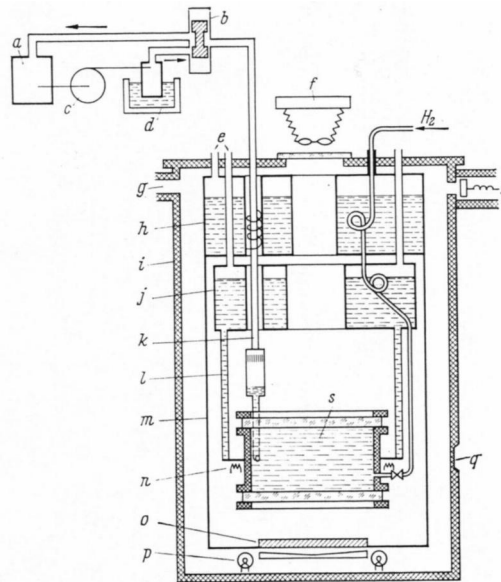


Abbildung 3: Aufbau einer Blasenkammer (entnommen aus [10])

befindet sich der flüssige Wasserstoff, die Teilchen treten durch q ein, f ist die Kamera, und die Beleuchtung sitzt bei p . Desweiteren sind die zur Temperaturregelung und zur Expansion des Wasserstoffs benötigten Teile zu sehen.

Man setzt die Kammer einem homogenen Magnetfeld aus, so dass man aus der

Krümmung der Bahn den Impuls des Teilchens berechnen kann. Außerdem verliert das Teilchen bei jeder Ionisation, die dann zu einer Blasenbildung führt, Energie. Dieser Energieverlust wird durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben, die so auch einen Zusammenhang zwischen der Bläschendichte und der Teilchenenergie liefert. Indem man also Impuls und Energie durch genaue Ausmessung der Bahn bestimmt, kann man auf die Masse des Teilchens schließen.

Abbildung 4 zeigt die früher am CERN genutzte große europäische Blasenkammer (BEBC).

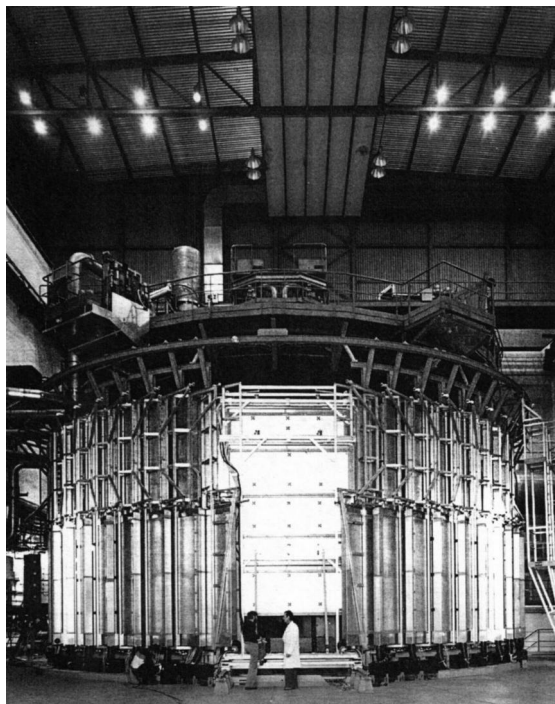


Abbildung 4: Big European Bubble Chamber (entnommen aus [7])

3.3 Strangeness

Ende der vierziger Jahre wurden in der kosmischen Strahlung Teilchen gefunden, die sich ungewöhnlich verhielten. Heute heißen sie Λ und K_s^0 . Sie werden immer nur paarweise zusammen erzeugt und zerfallen in Hadronen gemäß $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ und $K_s^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, allerdings mit extrem langen Lebensdauern von der Größenordnung $10^{-10}s$, während für Zerfälle aufgrund der starken oder elektromagnetischen Wechselwirkung Zeitskalen von $10^{-23}s$ bzw. $10^{-18}s$ typisch sind. Aus diesen beiden Fakten schließt man, dass es eine weitere Quantenzahl geben muss, die additiv ist und von der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten wird. Man nennt sie **Strangeness** S . Für Zerfälle, die von der schwachen Kraft vermittelt werden, gilt die Auswahlregel $\Delta S = \pm 1$. Ein Beispiel für Erzeugung und Zerfall zweier Teilchen mit Strangeness ist in Abbildung 5 zu sehen. In einer Wasserstoffblasenkammer trifft ein $1,1 GeV \pi^-$ -Meson auf ein Proton und erzeugt ein Kaon und ein Λ -Teilchen gemäß $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$. Das Λ zerfällt rechts unten gemäß $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$, das Kaon rechts oben in zwei Pionen, $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Eines der Pionen wandelt sich dann in ein Myon um: $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$.

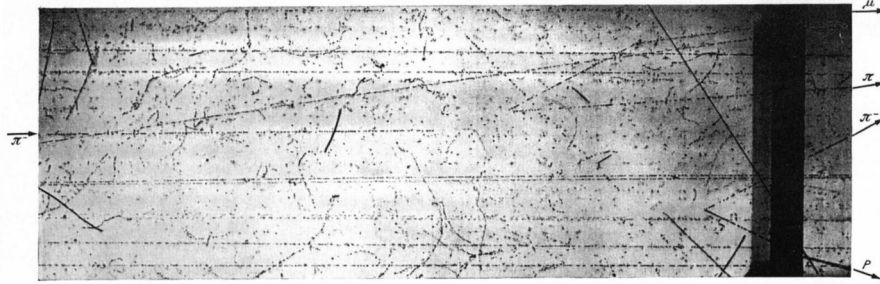


Abbildung 5: Erzeugung und Zerfall eines Λ und eines K^0 (entnommen aus [10])

3.4 Hyperladung

Abermaliger Blick auf Tabelle 1 zeigt, dass auch die drei Σ -Teilchen ein Triplet ($I = 1$) zu bilden scheinen, während sich die Ξ -Teilchen zu einem Dublett ($I = \frac{1}{2}$) zusammen fassen lassen. Um allerdings bei diesen Teilchen die korrekte Ladung zu erhalten, müssen wir die Strangeness in die obige Formel einbeziehen gemäß

$$Q = e \left(I_3 + \frac{B + S}{2} \right) \quad (13)$$

In dieser Form heißt sie **Gell-Mann-Nishijima-Relation**. Wir definieren als neue Quantenzahl die **Hyperladung**

$$Y = B + S \quad (14)$$

Sie kommt offenbar in (13) gleichberechtigt mit I_3 vor.

3.5 Zusammenfassung

Mit der Zusammenfassung von Teilchen zu Isospinmultipletts haben wir schon etwas Ordnung in den Teilchenzoo bringen können. Durch Kombination mit der Hyperladung gelingt dies jedoch weitaus umfassender, und der große Durchbruch bestand nun darin, die zugrunde liegende Symmetrie als $SU(3)$ -Symmetrie zu entdecken.

4 Die $SU(3)$ -Gruppe und das Quarkmodell der Hadronen

4.1 Fundamentale Darstellungen der $SU(3)$

Wie in Kapitel 2.2 gezeigt, besteht ein Satz $\{\lambda_i\}$ von Generatoren der $SU(3)$ aus acht linear unabhängigen, hermiteschen und spurfreien 3×3 -Matrizen. Wir wählen

den folgenden Satz:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Es gilt $\text{Sp}\lambda_i\lambda_j = 2\delta_{ij}$ und $[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k$ mit

ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{ijk}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

und $f_{ijk} = -f_{jik} = -f_{ikj}$ usw. Bei den Matrizen λ_i handelt es sich im Prinzip um verallgemeinerte Pauli-Matrizen.

In Analogie zur Spinalgebra der $SU(2)$ ($S_i = \frac{\sigma_i}{2}$) definieren wir $F_i := \frac{\lambda_i}{2}$ und damit drei Sätze von Leiteroperatoren

$$I_{\pm} = F_1 \pm iF_2 \quad V_{\pm} = F_4 \pm iF_5 \quad U_{\pm} = F_6 \pm iF_7 \quad (16)$$

sowie die beiden Diagonaloperatoren

$$I_3 = F_3 \quad \text{und} \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8 \quad (17)$$

Wegen $[Y, I_3] = 0$ existieren gemeinsame Eigenzustände $|I_3, Y\rangle$, so dass¹

$$\hat{I}_3|I_3, Y\rangle = I_3|I_3, Y\rangle \quad \hat{Y}|I_3, Y\rangle = Y|I_3, Y\rangle \quad (18)$$

Man findet $[I_+, I_-] = 2I_3$ und definiert deshalb $[U_+, U_-] = \frac{3}{2}Y - I_3 =: 2U_3$ und $[V_+, V_-] = \frac{3}{2}Y + I_3 =: 2V_3$. Wir berechnen nun die Wirkung der Schiebepoperatoren. Zum Beispiel findet man den Wert der dritten Komponente des Isospins des Zustands $V_{\pm}|I_3, Y\rangle$ durch Anwendung von \hat{I}_3 auf diesen Zustand. Dazu benötigen wir den Kommutator $[\hat{I}_3, V_{\pm}] = \pm\frac{1}{2}V_{\pm}$. Damit folgt $\hat{I}_3V_{\pm}|I_3, Y\rangle = (\pm\frac{1}{2}V_{\pm} + V_{\pm}\hat{I}_3)|I_3, Y\rangle = (I_3 \pm \frac{1}{2})V_{\pm}|I_3, Y\rangle \Rightarrow V_{\pm}|I_3, Y\rangle$ ist Eigenzustand von \hat{I}_3 zum Eigenwert $I_3 \pm \frac{1}{2}$. Analog erhält man mit dem Kommutator $[\hat{Y}, V_{\pm}] = \pm V_{\pm}$ die Hyperladung des Zustands $|I_3, Y\rangle$ durch Anwendung von \hat{Y} : $\hat{Y}V_{\pm}|I_3, Y\rangle = \dots = (Y \pm 1)V_{\pm}|I_3, Y\rangle \Rightarrow V_{\pm}|I_3, Y\rangle$ ist Eigenzustand von \hat{Y} zum Eigenwert $Y \pm 1$. Analoge Aussagen findet man für U_{\pm} und I_{\pm} , so dass wir zusammen fassen:

$$V_{\pm}|I_3, Y\rangle \propto |I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1\rangle \quad U_{\pm}|I_3, Y\rangle \propto |I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1\rangle \quad I_{\pm}|I_3, Y\rangle \propto |I_3 \pm 1, Y\rangle \quad (19)$$

Wir sind jetzt in der Lage, die beiden fundamentalen nicht-trivialen Multipletts der $SU(3)$ anzugeben. Dazu identifizieren wir die Eigenzustände von I_3 und Y wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |u\rangle \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |d\rangle \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |s\rangle \quad (20)$$

und nennen sie **up-Quark**, **down-Quark** und **strange-Quark**. Zum Beispiel ergibt sich für das up-Quark $I_3|u\rangle = \frac{\lambda_3}{2}|u\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle$ und $Y|u\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\lambda_8|u\rangle = +\frac{1}{3}|u\rangle$

¹Um Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir auch \hat{Y} für den Operator und Y für seinen Eigenwert.

und mit (13) $Q|u\rangle = (I_3 + \frac{Y}{2})|u\rangle = +\frac{2}{3}|u\rangle$. Führt man diese Rechnungen auch für die beiden anderen Quarks durch und ordnet den Quarks die Baryonenzahl $B = \frac{1}{3}$ zu, so dass man auch die Strangeness $S = Y - B$ berechnen kann, findet man die Werte aus Tabelle 2. Diese drei Zustände bilden das Multipllett einer fundamenta-

Quark	Spin	B	Q	I_3	S	Y
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
s	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$-\frac{2}{3}$

Tabelle 2: Eigenschaften der Quarks

len, nicht-trivialen Darstellung der $SU(3)$. Wir können es in der $Y - I_3$ -Ebene wie in Abbildung 6 zu sehen grafisch veranschaulichen. Dies ist das Analogon zu dem

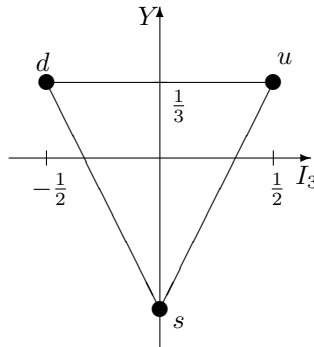


Abbildung 6: Die drei Quarks

in Abbildung 1 zu sehenden Multipllett der fundamentalen Darstellung der $SU(2)$. Aus (19) wissen wir auch, dass U_{\pm} Zustände entlang der $s - d$ -Linie, V_{\pm} Zustände entlang der $s - u$ -Linie und I_{\pm} solche entlang der $d - u$ -Linie verschiebt. Die Darstellung, die zu dem in Abbildung 6 zu sehenden Multipllett gehört, bezeichnet man mit [3].

Das Experiment lehrt uns nun, dass die Hadronen auch Antiteilchen besitzen, und wir erwarten, dass diese aus Anti-Quarks zusammen gesetzt sind. Bei diesen haben die Quantenzahlen B , Q , I_3 , S und Y in Tabelle 2 gerade das umgekehrte Vorzeichen und wir bezeichnen sie mit \bar{u} , \bar{d} und \bar{s} . Sie sind in Abbildung 7 zu sehen und bilden das Tripllett, das zu der anderen fundamentalen Darstellung der $SU(3)$ gehört, die mit $[\bar{3}]$ bezeichnet wird.

4.2 Mesonen und Baryonen

Wir können jetzt endlich Ordnung in die Vielzahl von Teilchen bringen, indem wir sie als Zustände in höherdimensionalen Darstellungen der $SU(3)$ identifizieren und sie entsprechenden Multiplletts zuordnen. Um die im folgenden auftretenden Produkte der Darstellungen [3] und $[\bar{3}]$ in Summanden zu zerlegen, benötigen wir noch die weiteren Darstellungen der $SU(3)$. Wir müssen hier auf die Ergebnisse der Gruppentheorie verweisen und nehmen deshalb die aus [3] entnommene Abbildung 8 zur Kenntnis.

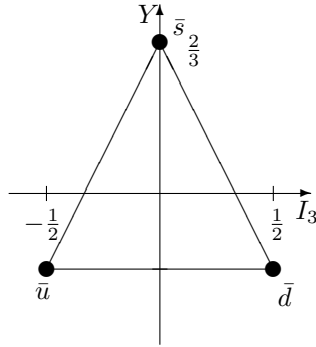


Abbildung 7: Die drei Anti-Quarks

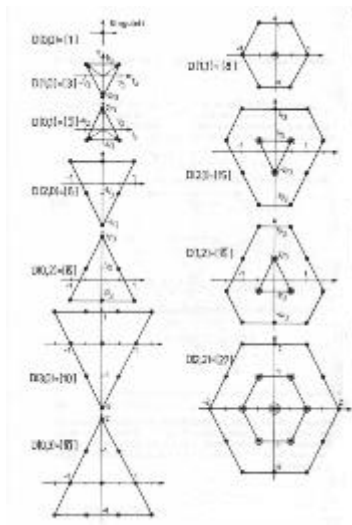


Abbildung 8: Die niedrigsten $SU(3)$ -Multipletts

4.2.1 Mesonen

Wir betrachten Zustände aus einem Quark und einem Anti-Quark, das heißt, wir bilden das Produkt $[3] \otimes [\bar{3}]$, siehe Abbildung 9. Wir finden so

$$[3] \otimes [\bar{3}] = [8] \oplus [1] \quad (21)$$

und können die Zusammensetzung der einzelnen Zustände wie in Abbildung 9 geschehen angeben. Lediglich die drei Zustände im Zentrum müssen noch genauer untersucht werden: Wir können annehmen, dass der Singulett-Zustand S symmetrisch in den drei Quarks ist: $S = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle)$. Einer der beiden O -Zustände im Zentrum des Oktetts wird zu dem Isospintriplett $I = 1$ gehören, also (vergleiche mit (9)): $O_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$. Das Minuszeichen kommt dabei daher, dass einer der Konstituenten ein Anti-Quark ist. Der Zustand O_2 sollte dann orthogonal zu diesen beiden sein: $O_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle)$.

Nun sind wir soweit, diesen Zuständen in der Natur vorkommende Teilchen zuzuordnen. Es sind dies die Pionen, die das Isospintriplett mit $Y = 0$ bilden, die Kaonendupletts $K^0 = |d\bar{s}\rangle$ und $K^+ = |u\bar{s}\rangle$ mit $Y = 1$ sowie $K^- = |s\bar{u}\rangle$ und $\bar{K}^0 = |s\bar{d}\rangle$ mit $Y = -1$ und schließlich die η -Mesonen: $O_2 \approx |\eta\rangle$ und der Singulett-Zustand

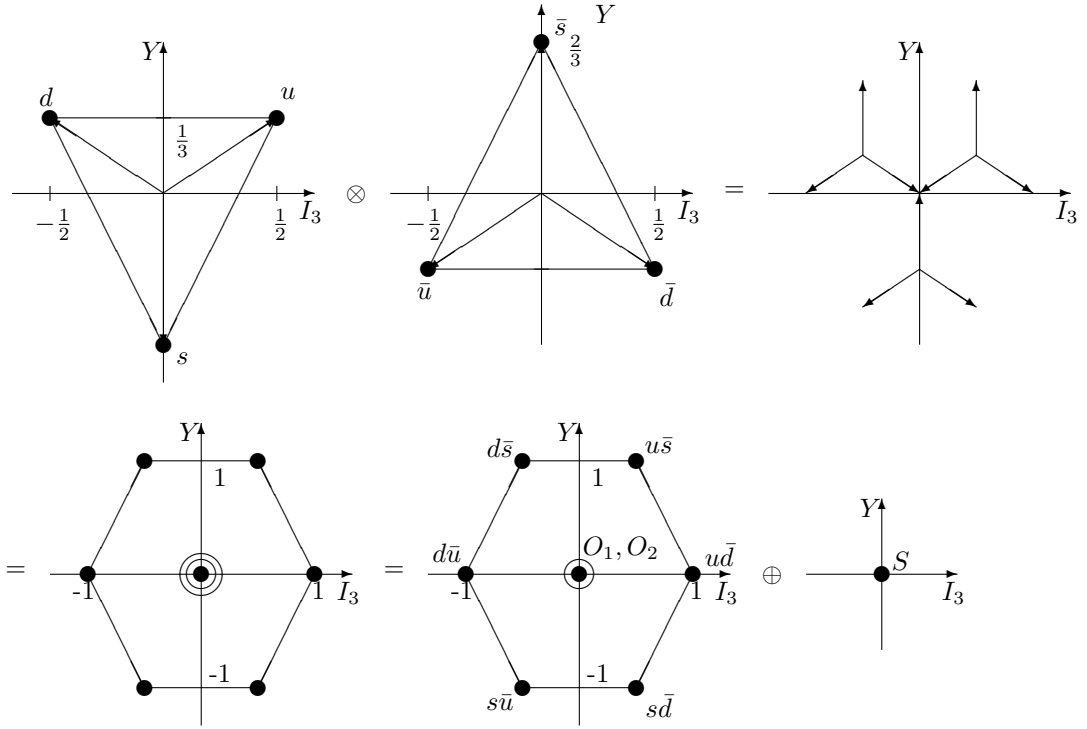


Abbildung 9: Ausreduktion des Produktes $[3] \otimes [\bar{3}]$

$S \approx |\eta\rangle$. In Wirklichkeit sind η und η' Linearkombinationen von S und O_2 . Alle diese Teilchen haben $J^P = 0^-$. Ihre Massen liegen zwar in der gleichen Größenordnung von 500 MeV , es gilt aber immerhin $m_K \approx 3m_\pi$. Daran kann man schon erkennen, dass die von uns betrachtete Symmetrie nicht exakt ist, darauf kommen wir noch zurück.

Die eben erwähnten Mesonen sind die leichtesten ihrer Art. Daneben kommen noch angeregte Zustände in der Natur vor. Zunächst können die Spins der beiden Quarks parallel ($S = 1$) oder antiparallel gekoppelt werden ($S = 0$). Dieser Gesamtspin wird dann mit dem Bahndrehimpuls $L = 0, 1, 2, \dots$ zum Gesamtdrehimpuls J gekoppelt, während für die Parität wegen (12) und der Tatsache, dass Quark und Anti-Quark entgegengesetzte Parität haben, gilt: $P = -(-1)^L$. So heißen zum Beispiel die Teilchen, die das Nonett zu $J^P = 1^-$ bilden, ρ, K^*, ω, ϕ , sie haben Massen der Größenordnung 800 MeV . Bei diesen Teilchen tritt noch die Besonderheit auf, dass die zu Oktett und Singulett gehörenden Zentrumszustände so mischen, dass näherungsweise $\phi \approx |s\bar{s}\rangle$ und $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)$ gilt. Diese Zusammensetzung erklärt auch sehr einfach die beobachteten Zerfallskanäle der beiden Teilchen. So zerfällt das ϕ zu 84% in Kaonen, also seltsame Teilchen, gemäß $\phi \rightarrow \left\{ \begin{matrix} K^+ K^- \\ K^0 \bar{K}^0 \end{matrix} \right\}$ und nur zu 15% in Pionen, die keine Strangeness besitzen. Hingegen zerfällt das ω nur in Pionen, und zwar zu 90% nach $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$, zu 10% gemäß $\omega \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \pi^+ \pi^- \\ \pi^0 \gamma \end{matrix} \right\}$.

Allgemein kann man sagen, dass die Teilchen mit zunehmendem J immer schwerer werden.

Besondere Erwähnung verdient die Tatsache, dass trotz intensiver Suche bisher keine Mesonen mit Quantenzahlen gefunden wurden, die dieses Quarkmodell nicht erklären kann, zum Beispiel $I = \frac{3}{2}$ oder $Y = 2$. Dies ist eine der besten Bestätigun-

gen des Modells.

4.2.2 Baryonen

Wir untersuchen, welche Zustände wir bei einer Kombination von drei Quarks erhalten. Analoges Vorgehen wie in Abbildung 9 liefert unter Hinzunahme von Abbildung 8 die Zerlegungen $[3] \otimes [3] = [6] \oplus [\bar{3}]$ und $[6] \otimes [3] = [10] \oplus [8]$. Damit finden wir:

$$[3] \otimes [3] \otimes [3] = ([6] \oplus [\bar{3}]) \otimes [3] = [6] \otimes [3] \oplus [\bar{3}] \otimes [3] = [10] \oplus [8] \oplus [8] \oplus [1] \quad (22)$$

Zunächst stellen wir fest, dass wir die in Tabelle 1 zu findenden leichtesten Baryonen $p, n, \Sigma, \Xi, \Lambda$ mit Spin-Parität $J^P = \frac{1}{2}^+$ und Massen von der Größenordnung $m = \mathcal{O}(1000 \text{ MeV})$ zu einem Oktett zusammen fassen können, wie es in Abbildung 10 zu sehen ist. Dabei bilden die Nukleonen ein Isospin-Dublett mit der Hyperla-

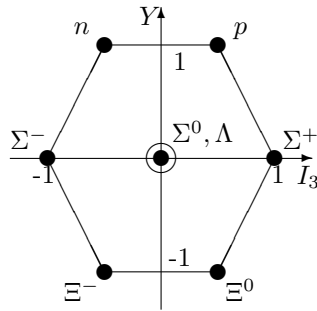


Abbildung 10: Das Oktett der leichtesten Baryonen

dung $Y = 1$, die drei Σ -Teilchen ein Triplet mit $Y = 0$, die beiden Ξ -Teilchen ein Dublett mit $Y = -1$ und das Λ ein Isospin-Singulett.

Zum Test für das $SU(3)$ -Modell hatte sich Anfang der sechziger Jahre das Dekuplett [10] der Baryonen entwickelt. Man konnte nämlich neun der zehn Zustände bekannte Teilchen, die alle Spin-Parität $J^P = \frac{3}{2}^+$ besaßen, zuordnen: das Isospin-Quartett der Δ -Teilchen mit $Y = 1$ und $m_\Delta = 1232 \text{ MeV}$, das Triplet der Σ^* -Teilchen mit $Y = 0$ und $m_{\Sigma^*} = 1384 \text{ MeV}$ und das Dublett der Ξ^* -Teilchen mit $Y = -1$ und $m_{\Xi^*} = 1533 \text{ MeV}$, siehe Abbildung 11. Die Spitze des Dekubletts konnte mit

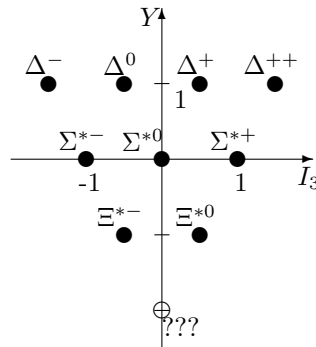


Abbildung 11: Das Dekuplett der Baryonen

keinem bekannten Teilchen besetzt werden. Deshalb postulierte man die Existenz eines neuen Teilchens, das man Ω^- nannte und dessen Existenz so zum Prüfstein der Theorie wurde. Es musste ebenfalls $J^P = \frac{3}{2}^+$ haben, sowie Baryonenzahl $B = 1$,

Isospin $I = 0$ und Hyperladung $Y = -2$, also mit (14) Strangeness $S = -3$. Da zwischen den einzelnen Isospin-Multipletts eine Massendifferenz von jeweils ungefähr 150 MeV besteht, postulierte man $m_{\Omega^-} \approx 1680 \text{ MeV}$. Die Entdeckung dieses Teilchens wollen wir im nächsten Kapitel betrachten.

Es sollte noch erwähnt werden, dass es natürlich zu jedem Baryon auch ein entsprechendes Anti-Teilchen gibt. Diese Zustände können analog durch Kombination von drei Anti-Quarks $|\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle$ erhalten werden.

4.3 Brechung der Symmetrie und Massenbeziehung

Zuvor ist es aber angebracht, einige Worte zu den Massenunterschieden innerhalb der verschiedenen von uns kennengelernten $SU(3)$ -Multipletts zu verlieren. Sie zeigen, dass die exakte $SU(3)$ -Symmetrie, bei deren Erfüllung alle Zustände eines Multipletts die gleiche Masse hätten, durch elektromagnetische und starke Wechselwirkung gebrochen wird. Wir unterscheiden zwei Effekte. Zum einen fällt auf, dass sich die Teilchen, die zu ein und demselben Isospin-Multiplett gehören, in ihrer Masse um Größenordnungen von einigen MeV unterscheiden. Dies liegt daran, dass sie unterschiedliche elektrische Ladungen aufweisen. Deshalb ist der Teil der Bindungsenergie, der aus der elektromagnetischen Kraft herrührt, bei den einzelnen Zuständen unterschiedlich. Einen um zwei Ordnungen größeren Effekt ruft hingegen die starke Wechselwirkung hervor. Wir hatten schon gesehen, dass die Massenunterschiede zwischen den einzelnen Isospin-Multipletts bei den Baryonen ungefähr 150 MeV im Falle des Dekubletts und ungefähr 200 MeV im Falle des Oktetts betragen. Bei den Mesonen ist $m_\pi \approx 140 \text{ MeV}$ und $m_K \approx 500 \text{ MeV}$, hier ist die Massenaufspaltung also noch größer. Nun unterscheiden sich die einzelnen Isospin-Multipletts aber durch ihre Strangeness, während die Zusammensetzung aus up- und down-Quarks nur für den zuvor beschriebenen Effekt wichtig ist. Daher liegt es nahe anzunehmen, dass up- und down-Quark eine ähnliche Masse haben, $m_u \approx m_d =: m$, während das strange-Quark schwerer ist: $m_s > m$. Die Symmetriebrechung rührt also aus den unterschiedlichen Massen der Quarks her. Wir wollen beispielhaft eine Beziehung für die Massen des Baryonenoktetts herleiten. Dazu machen wir die grobe Annahme, dass die Bindungsenergie W_B zwischen den Quarks bei all diesen Teilchen gleich ist. Da wir bei der grafischen Durchführung von (22) die Zusammensetzung der Teilchen gleich mit erhalten, zum Beispiel $|p\rangle = |uud\rangle$ oder $|\Xi^0\rangle = |uss\rangle$ usw., können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} m_N &= 3m - W_B \\ m_\Sigma &= 2m + m_s - W_B \\ m_\Lambda &= 2m + m_s - W_B \\ m_\Xi &= m + 2m_s - W_B \end{aligned}$$

Daraus folgt die Massenbeziehung

$$\frac{m_N + m_\Xi}{2} = \frac{3m_\Lambda + m_\Sigma}{4} \quad (23)$$

die experimentell erstaunlich gut erfüllt ist, was durch Einsetzen der Zahlenwerte untermauert wird:

$$1128 = \frac{939 + 1318}{2} \approx \frac{3 \cdot 1116 + 1193}{4} = 1135 \text{ [MeV]}$$

4.4 Die Farben der Quarks

Unser oben entwickeltes Modell enthält noch mindestens zwei Probleme. Zum einen haben wir nicht erklärt, warum in der Natur scheinbar nur Zustände der Form $|q\bar{q}\rangle$,

$|qqq\rangle$ und $|\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle$ vorkommen und nicht zum Beispiel auch $|qq\rangle$.

Zum anderen stellen wir fest, dass das Δ^{++} -Teilchen das Pauli-Prinzip zu verletzen scheint. Denn um seinen Spin von $\frac{3}{2}$ zu erklären, muss seine Gesamtwellenfunktion die Form

$$|\Delta^{++}\rangle = |uuu\rangle|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$$

haben. Dies ist aber ein Zustand, der symmetrisch unter Vertauschung zweier Quarks ist, im Widerspruch zum Pauli-Prinzip für Teilchen mit halbzahligem Spin. Da die Δ -Teilchen außerdem die leichtesten Spin $\frac{3}{2}$ -Baryonen sind, werden sich die Quarks im Grundzustand befinden und der Ortsanteil der Wellenfunktion ebenfalls symmetrisch sein.

Die Lösung dieser Probleme besteht darin, den Quarks noch einen weiteren inneren Freiheitsgrad zuzuordnen, nämlich ihre **Farbe**, die die Werte rot r , grün g und blau b annehmen kann. Man kann nun das Farbmodell der Quarks genau durch dieselbe $SU(3)$ -Symmetrie beschreiben, die wir eben schon ausführlich besprochen haben. Insbesondere findet man, dass gerade der Singulett-Zustand

$$|1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(|rgb\rangle - |rbg\rangle + |brg\rangle - |bgr\rangle + |gbr\rangle - |grb\rangle) \quad (24)$$

antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Quarks ist. Er beschreibt ein farbloses Baryon. Man stellt die Forderung auf, dass die Hadronen farblos sein sollen. Dann können aber nur solche Produkte von Quarks gebildet werden, in deren Zerlegung in Summanden ein Singulett vorkommt. Das ist aber nur bei $[3] \otimes [3]$, $[3] \otimes [3] \otimes [3]$ und $[\bar{3}] \otimes [\bar{3}] \otimes [\bar{3}]$ der Fall.

Nun kann man auch einsehen, warum der Singulettzustand in (22) bei den Baryonen nicht besetzt ist. Das Produkt aus Sorten- und Farbanteil wäre symmetrisch unter Vertauschung zweier Quarks, im Widerspruch zum Pauliprinzip.

5 Die Entdeckung des Ω^- -Teilchens

Wie schon erwähnt, diente die Vorhersage des Ω^- -Teilchens als Prüfstein des von uns betrachteten Modells des Aufbaus der Hadronen aus Quarks. Seine Entdeckung durch eine Gruppe am Brookhaven National Laboratory im Jahre 1964 war daher ein wichtiger Erfolg und das entsprechende Experiment soll im folgenden geschildert werden.

Das Ereignis, das erstmals die Produktion eines Ω^- enthält, zeigt Abbildung 12. Eine 80 Zoll-Wasserstoff-Blaskammer wurde einem Strahl von 5 GeV - K^- -Mesonen ausgesetzt, dabei wurden etwa 100 000 Fotos gemacht. Eines davon enthielt das gesuchte Ereignis. Auf dem Foto ist die folgende Zerfallskette zu sehen. Zunächst trifft ein einfallendes Kaon auf ein Proton des Wasserstoffs und erzeugt das Ω^- :

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$$

Man beachte, dass neutrale Teilchen wie das K^0 keine sichtbaren Spuren hinterlassen, ihre Impulsvektoren müssen aus Impuls- und Energieerhaltung berechnet werden.

Die weitere Zerfallskette lautet:

$$\begin{aligned} \Omega^- &\rightarrow \Xi^0 + \pi^- \\ \Xi^0 &\rightarrow \Lambda^0 + \pi^0 \\ \Lambda^0 &\rightarrow \pi^- + p \quad \text{und} \quad \pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow 2 \times (e^+ + e^-) \end{aligned}$$

Diese Interpretation wird wie folgt belegt. Zunächst wird Spur (2) aus Impuls- und Blasendichtenmessung als K^+ identifiziert. Die Spuren (5) und (6) entstehen

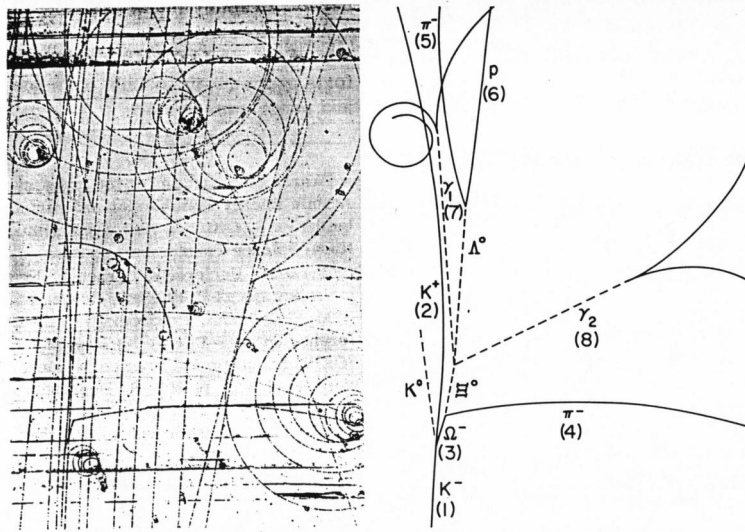


Abbildung 12: Zerfall eines Ω^- (entnommen aus [11])

an einem Vertex, an dem keine Spur endet. Hier ist also ein neutrales Teilchen zerfallen, dessen Masse aus Energie- und Impuls der Zerfallsprodukte zu $1116 \pm 2 \text{ MeV}$ berechnet wurde, was mit einem Λ^0 übereinstimmt. Des Weiteren sind auf dem Ereignisbild zwei Gabeln zu erkennen, die als Paarbildung durch zwei Photonen erkannt werden. Ihre effektive Masse ist $135,1 \pm 1,5 \text{ MeV}$, was konsistent mit einem π^0 -Zerfall ist. Die Spuren der Photonen und des Λ^0 zeigen auf den selben Punkt. Dort ist also ein weiteres neutrales Teilchen zerfallen, dessen Masse zu $1316 \pm 4 \text{ MeV}$ berechnet wurde, also ein Ξ^0 . (Das π^0 -Meson ist extrem kurzlebig.) Aus Impuls- und Blasendichtenmessung wurde geschlossen, dass die Masse des Teilchens von Spur (4) kleiner als die eines Kaons ist und dieses deshalb ein π^- sein muss. Dann konnte wiederum die Masse des zu Spur (3) gehörenden Teilchens berechnet werden. Sie ergab sich zu $1686 \pm 12 \text{ MeV}$ in beeindruckender Übereinstimmung mit der Vorhersage. Damit bei der Produktionsreaktion Strangeness- und Impulserhaltung erfüllt sind, musste die Erzeugung eines zusätzlichen K^0 angenommen werden. Aus kinematischen Überlegungen wurde noch festgestellt, dass der Transversalimpuls von Spur (4) größer war als der des negativen Zerfallsproduktes bei jedem anderen bekannten Zerfall eines negativen Teilchens, außer für $\Xi^- \rightarrow e^- + n + \nu$. Dies verletzt aber die Auswahlregel $\Delta S = \pm 1$ und erklärt auch nicht die beiden Paarerzeugungen. Die Lebensdauer des neuen Teilchens wurde aus der Länge der Spur (3) zu $7 \cdot 10^{-11} \text{ s}$ bestimmt, es handelt sich also um einen schwachen Zerfall. Handelte es sich bei dem Teilchen um eines mit $S = -1$, so würde dieses stark in Zeiten von 10^{-22} s in bekannte Teilchen zerfallen. Die Gruppe sah sich daher imstande, das neue Teilchen als Ω^- zu identifizieren.

6 Die Entdeckung der charm- und bottom-Quarks

6.1 Das c -Quark

Im November 1974 wurde von zwei Arbeitsgruppen unabhängig voneinander ein Teilchen gefunden, das heute $J/\Psi(1S)$ heißt und nicht in das bis jetzt besprochene Ordnungsschema passte. Dieser Vorgang ist als „Novemberrevolution“ in die Geschichte eingegangen.

Man kann das Teilchen zum Beispiel mit Elektron-Positron-Collidern erzeugen, und zwar bei einer Schwerpunktsenergie von 3097 MeV , seiner Ruhemasse. Dabei macht man sich die Tatsache zu Nutze, dass bei der Erzeugung von Hadronen in e^+e^- -Stößen scharfe Maxima im Wirkungsquerschnitt bei bestimmten Schwerpunktsenergien auftreten. Scheinbar passt die Schwerpunktsenergie dort gerade zur Ruhemasse eines neuen Teilchens und man bezeichnet ein solches Maximum als **Resonanz**. Die Höhe der Resonanz ist dabei ein Maß für die Produktionsrate des neuen Teilchens, während ihre Breite nach der Unschärferelation umgekehrt proportional zu dessen Lebensdauer ist.

Die Breite der Resonanz beim $J/\Psi(1S)$ beträgt nur $(77 \pm 5) \text{ keV}$, was nicht mit den Breiten von anderen vergleichbaren Mesonen oberhalb der Masse des ϕ zu vergleichen ist, die $150 - 250 \text{ MeV}$ betragen. Hier musste also etwas Neuartiges vorliegen und der Zustand wurde identifiziert als **Charmonium**

$$|J/\Psi\rangle = |c\bar{c}\rangle \quad (25)$$

bestehend aus einem neuen Quark, dem **charm-Quark** und dessen Anti-Quark. Die Entdeckung dieses Quarks führt zur Einführung einer neuen Quantenzahl, dem **charm** C eines Teilchens, und das c -Quark erhält $C = 1$. Um Teilchen mit charm zu beschreiben, muss man zur Symmetriegruppe $SU(4)$ übergehen. Die Multipletts, die man dort zeichnet, enthalten je eine I_3 , Y und C -Achse und als fundamentale Multipletts ergeben sich zwei Tetraeder mit uds bzw. $\bar{u}\bar{d}\bar{s}$ wie gehabt in der $I_3 - Y$ -Ebene und c bei $C = 1, I_3, Y = 0$ bzw. \bar{c} bei $C = -1, I_3, Y = 0$. Für die Ausreduktion von Produkten dieser Multipletts zieht man dann besser raffiniertere Methoden der Gruppentheorie heran. Diese $SU(4)$ -Symmetrie ist allerdings wegen der sehr großen Masse des c -Quarks recht stark gebrochen.

Neben dem oben erwähnten Zustand des Charmoniums existieren noch andere Anregungszustände mit verschiedenen Massen, und man kann für das Charmonium ein Termschema analog zu den aus der Atomphysik bekannten angeben. So wurde bereits wenige Tage nach der Entdeckung des $J/\Psi(1S)$ eine weitere Resonanz am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) gefunden, und zwar bei einer Schwerpunktsenergie E_{cm} von $(3,695 \pm 0,004) \text{ GeV}$. Abbildung 13 zeigt den Wirkungs-

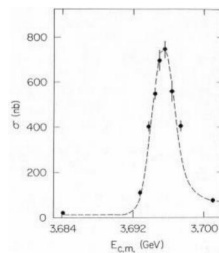


Abbildung 13: Resonanz $\Psi(3695)$ (entnommen aus [14])

querschnitt σ in Abhängigkeit von E_{cm} und die Resonanz ist klar zu erkennen. Man hat natürlich ebenfalls Mesonen und Baryonen mit charm gefunden, zum Beispiel $D^0 = |c\bar{u}\rangle$, $D^+ = |c\bar{d}\rangle$ oder $D_s^+ = |c\bar{s}\rangle$.

6.2 Das b -Quark

Im Jahre 1977 beschloss eine Gruppe am Fermilab in Chicago ein Target aus Kupfer und Blei mit Protonen. Dabei entdeckten sie ein Teilchen namens Υ , wiederum als eine Resonanz im Wirkungsquerschnitt, siehe Abbildung 14. Es hat sich heraus

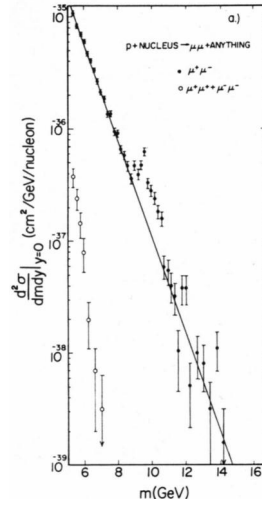


Abbildung 14: Υ -Resonanz(en) (entnommen aus [15])

gestellt, dass auf Abbildung 14 zwei oder mehr Resonanzen zu sehen sind, die jedoch so nahe beieinander liegen, dass die Energieauflösung des Detektors nicht ausreicht, um sie zu trennen. Sie heben sich dabei deutlich von dem Kontinuums-Untergrund ab. Die Massen der Υ -Zustände liegen bei $m_{\Upsilon} = 9,46 \text{ GeV}$, $m_{\Upsilon'} = 10,02 \text{ GeV}$ und $m_{\Upsilon''} = 10,35 \text{ GeV}$.

Diese Teilchen wurden als gebundene Zustände eines neuen Quarks gedeutet. Es wurde **bottom-Quark** b genannt und der neue Zustand **Bottomium**:

$$|\Upsilon\rangle = |b\bar{b}\rangle \quad (26)$$

Wieder führt man eine neue additive Quantenzahl namens **bottomness** oder **beauty** B^* ein, die wie der charm von starker und elektromagnetischer Wechselwirkung erhalten wird, und ordnet dem b -Quark $B^* = -1$ zu. Man hat ebenfalls Mesonen und Baryonen, die das b -Quark enthalten, gefunden.

Schließlich müssen wir (13) verallgemeinern zu

$$Q = e \left(I_3 + \frac{B + S + C + B^*}{2} \right) \quad (27)$$

7 Schlusswort

Es ist als eine erstaunliche Tatsache anzusehen, dass die Ordnung im Zoo der Elementarteilchen durch eine abstrakte mathematische Symmetriegruppe erreicht wird. Wie gesehen, ist die beschriebene Symmetrie recht stark gebrochen, besonders bei Einbeziehung der schwereren Quarks. Man muss also sagen, dass das Quarkmodell insgesamt eher auf einem wackligen Fundament steht. Es stellt sich jedoch heraus, dass der $SU(3)$ -Gruppe im Bereich der Elementarteilchenphysik eine fundamentale Bedeutung zukommt, nicht so sehr wegen des Quarkmodells, sondern bei der Beschreibung der Farbladungen der starken Wechselwirkung.

Literatur

- [1] *H. Vogel*, Gerthsen Physik, 18. Auflage
- [2] *K. Bethge, U.E. Schröder*, Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen, 2. Auflage
- [3] *W. Greiner, B. Müller*, Quantenmechanik, Teil 2, Symmetrien, 3. Auflage
- [4] *D.H. Perkins*, Introduction to High Energy Physics, 3rd edition
- [5] *C. Berger*, Elementarteilchenphysik
- [6] *F. Halzen, A. Martin*, Quarks & Leptons
- [7] *I.S. Hughes*, Elementary Particles, 3rd edition
- [8] *W. Demtröder*, Experimentalphysik 4
- [9] *F. Schwabl*, Quantenmechanik, 5. Auflage
- [10] *W. Finkelnburg*, Einführung in die Atomphysik, 11./12. Auflage
- [11] *V.E. Barnes et al.*, Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three, Phys. Rev. Lett. **12** (1964), p. 204
- [12] *J.J. Aubert et al.*, Experimental Observation of a Heavy Particle *J*, Phys. Rev. Lett. **33** (1974), p. 1404
- [13] *J.-E. Augustin et al.*, Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- -Annihilation, Phys. Rev. Lett. **33** (1974), p. 1406
- [14] *G.S. Abrams et al.*, Discovery of a Second Narrow Resonance in e^+e^- -Annihilation, Phys. Rev. Lett. **33** (1974), p. 1453
- [15] *S.W. Herb et al.*, Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions, Phys. Rev. Lett. **39** (1977), p. 252
- [16] *J. Jersák*, Spezielle Relativitätstheorie, Skriptum zur Vorlesung an der RWTH Aachen