7.A

Nuclear Physics 58 (1964) 561—579; © *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

KONSEQUENZEN DER DILATATIONSGRUPPE BEI SEHR HOHEN ENERGIEN

H. A. KASTRUP

Institut für Theoretische Physik der Universität München

Eingegangen am 14. Dezember 1963

Abstract: The hypothesis is analysed that the dilatations in space and time become important at very high energies. Since the homogeneous functions form irreducible representations of the dilatations the elastic scattering amplitude $F(s, t)$ is assumed to become homogeneous at very high energies in those variables, which are large compared to the rest masses of the particles concerned (s and t are the squared total energy and the squared momentum transfer in the c.m. system.) This means that for the forward direction $F(s, t) \backsim \beta(t)s^{\alpha(t)}$ if $s \rightarrow \infty$, and for large s and t one has $F(s, t) \backsim F_{00}(s/t)$ or $d\sigma_{el} \backsim (\text{const.}/s)d\Omega$ for the elastic differential cross section at fixed scattering angle $\neq 0$.

These results are extended to the case of 2 initial particles being scattered into n final ones. If some of the particles have the same directions, a generalized Regge behaviour is obtained; if all directions are different, the inelastic amplitude $F(2 \rightarrow n)$ behaves like $(\sqrt{s})^{2-n}$ for $s \rightarrow \infty$.

For the partial wave amplitude $F_l(s)$ it follows that $F_l \backsim \text{const.} \neq 0$ if $s \rightarrow \infty$. This limit is compatible with unitarity.

1. Physikalische Interpretation

In früheren Arbeiten [1-3]) wurde die Frage untersucht, welche physikalische Bedeutung die konformen Transformationen von Raum und Zeit haben. Aus der Hypothese, daß die Naturvorgänge konforminvariant sind, bei denen die Massen der beteiligten Teilchen gegenüber ihren kinetischen Energien vernachlässigt werden können, ergaben sich einige interessante experimentelle Konsequenzen für Streuprozesse bei sehr hohen Energien.

Das Ziel dieser Arbeit ist, die frühere physikalische Interpretation der konformen Transformationen zu verschärfen und einige experimentelle Konsequenzen bei sehr hohen Energien ausführlicher zu diskutieren.

Wir werden uns im folgenden hauptsächlich auf die Dilatationen

$$x^{\mu'} = \rho x^{\mu}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3; \qquad \rho > 0 \text{ und konstant,} \tag{1}$$

beschränken und die speziellen konformen Transformationen

$$\begin{aligned} x^{\mu'} &= \sigma^{-1}(x)(x^{\mu} - c^{\mu} x^2), \\ \sigma(x) &= 1 - 2c \cdot x + c^2 x^2, \\ x^2 &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

nur am Rande behandeln; denn infolge der Eigenschaft der Gleichungen (2), lokale Umeichungen zu induzieren – im Gegensatz zu den globalen Skalentransformationen (1) – hat es zunächst keinen Sinn, diese Transformationen auf die nichtlokalen Impulse wirken zu lassen, auf die es bei Streuprozessen ja vor allem ankommt. Dazu kommt die schon früher [1]) erwähnte Eigenschaft der Energie-Impuls-Operatoren, bei Hinzunahme der zu den Transformationen (2) gehörigen Operatoren der Lieschen Algebra kein vollständiges Eigenvektorsystem mehr zu haben. Die hierdurch aufgeworfenen Fragen sollen später in etwas anderem Zusammenhang untersucht werden.

Man kann die Gln. (1) in üblicher Weise sowohl als Koordinatentransformationen deuten, die das physikalische Objekt festlassen und das Bezugssystem ändern [1]), oder als Abbildung, bei der ein physikalisches Objekt einem anderen vermöge der Beziehung (1) zugeordnet wird, wobei das Bezugssystem für beide Objekte dasselbe ist [2]). Dieser begriffliche Unterschied wird besonders deutlich, wenn wir die Notation von ref. [1]) benutzen: Die vorgegebene Länge E sei ausgedrückt durch den Einheitsmaßstab e bzw. dessen Komponenten e_μ:

$$E = \mathrm{d}se = \mathrm{d}x^\mu e_\mu, \qquad \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2-(\mathrm{d}x^1)^2-(\mathrm{d}x^2)^2-(\mathrm{d}x^3)^2.$$

Bei der Interpretation der Gln. (1) als Koordinatentransformation haben wir dann

$$\begin{aligned} E' = E, \qquad e_\mu &= \rho e'_\mu, \qquad \mathrm{d}x^{\mu'} = \rho \mathrm{d}x^\mu, \\ e &= \rho e', \qquad \mathrm{d}s' = \rho \mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3}$$

und bei der Interpretation als Abbildung

$$\begin{aligned} E' = \rho E, \qquad e'_\mu &= e_\mu, \qquad \mathrm{d}x^{\mu'} = \rho \mathrm{d}x^\mu, \\ e' &= e, \qquad \mathrm{d}s' = \rho \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4}$$

Physikalisch ist kein prinzipieller Unterschied zwischen beiden Auffassungen; denn anstelle von e kann man natürlich auch E als Einheit wählen. Dies drückt sich darin aus, daß die Gln. (3) in (4) übergehen und umgekehrt, wenn man darin E und e vertauscht.

Die entscheidende Frage für die physikalische Bedeutung der Transformationen (1) ist nun: Wann gibt es – wenigstens im Prinzip – zu einem physikalischen Objekt ein anderes physikalisches Objekt, das sich in seiner Längenausdehnung von dem ersten um den Faktor ρ unterscheidet, wobei ρ eine beliebige reelle Zahl > 0 ist?

Diese Frage ist gleichbedeutend mit der folgenden: Wann kann man physikalischen Größen ein Längendimension zuordnen? Denn, wie schon früher [1]) erwähnt, die Längendimension einer physikalischen Größe ist zunächst nichts anderes als ein Kennzeichen für die Darstellung, nach der sich die betreffende Größe bei den Dilatationen (1) transformiert.

Da, wie wir sehen werden, die Symmetrie (1) nicht in allen Bereichen der Physik gilt, haben wir u.a. das etwas überraschende Ergebnis, daß es gar nicht immer möglich ist, physikalischen Größen eine Längendimension in dem genannten Sinne zuzuordnen, zumindestens nicht mit der Selbstverständlichkeit, mit der das bisher geschehen ist!

Um unsere Ausgangsfrage zu beantworten, ist es wichtig, wie in der Quantenmechanik zwischen makroskopischen und mikroskopischen Objekten zu unterscheiden. (Diese Unterscheidung fehlt in ref. [1]) und daher sind die dortigen Überlegungen noch unvollständig).

Solange wir die Körper als Kontinua ansehen – und dies ist makroskopisch in sehr guter Näherung wohl immer möglich – haben die Dilationen (1) einen unmittelbaren physikalischen Sinn. Beispiele sind die – in ihren praktischen Auswirkungen oft so fatale – Willkür bei der Wahl der makroskopischen Längeneinheiten, die Ähnlichkeitsgesetze in der Hydromechanik (Reynoldsche Zahl!), überhaupt die Möglichkeit, physikalische Zusammenhänge bestimmter Objekte an beliebig verkleinerten oder vergrößerten Modellen zu studieren.

Anders ist die Situation im atomaren Bereich bei niedrigen Energien: Wir kennen keine Objekte, die sich vom Elektron lediglich dadurch unterscheiden daß z.B. ihre Compton-Wellenlängen ρ-mal größer als die des Elektrons sind, wobei ρ eine beliebige reelle Zahl > 0 ist. Im Atomaren spielt die Symmetriegruppe (1) daher keine Rolle, solange wir es mit Größen zu tun haben, die in ihren Längeneigenschaften keine kontinuierlichen sondern nur diskontinuierliche Werte annehmen. Es mag sein, daß man in bestimmten Fällen [4]) anstelle der kontinuierlichen Dilatationen (1) diskontinuierliche einführen kann. Man hat dann jedoch keine Liesche Gruppe mehr und steht damit vor ganz neuen Problemen.

Betrachtet man also die niederenergetische atomare Welt isoliert von der übrigen, so ist es in der Regel garnicht möglich, ihren physikalischen Objekten eine durch die Transformationen (1) induzierte Längendimension zuzuordnen! Wenn dies trotzdem geschieht, so liegt das daran, daß wir von den atomaren Objekten immer nur durch ihre Wechselwirkung mit makroskopischen Meßapparaturen erfahren und daß wir das atomare Geschehen mittels makroskopisch gewonnener Begriffe beschreiben [5]). Zu diesen gehört immer eine von den Dilatationen (1) herrührende Längendimension und auf solchen Umwegen erhalten auch die atomaren Größen eine. Dabei hat man sich jedoch vor Augen zu halten, daß dem keine wirkliche atomare Symmetrie zugrunde liegt!

Die Dilatationsinvarianz sollte jedoch auch im Atomaren dann wesentlich werden, wenn Zustände vorliegen, die durch Größen charakterisiert sind, deren Werte in den betrachteten Zuständen soweit im kontinuierlichen Spektrum dieser Größen liegen, daß der Einfluß des diskontinuierlichen Teiles vernachlässigbar ist. Diese Hypothese, die auch andere Dilatationen als die von Längen einbezieht, ist im Grunde nichts anderes als eine gruppentheoretische Variante des Bohrschen Korrespondenzprinzipes, nach dem bei sehr hohen Quantenzahlen die quantenmechanischen Gesetzmäßigkeiten in die entsprechenden klassischen übergehen.

Wir werden im weiteren alle Längendimensionen, die ein unmittelbarer Ausdruck der Symmetriegruppe (1) sind, als Längendimensionen 1. Art und alle übrigen als Längendimensionen 2. Art bezeichnen. So kann der nichtkontinuierliche Teil des Spektrums einer Größe mit von Null verschiedener Längendimension immer nur eine Längendimension 2. Art haben. Mit dieser Unterscheidung zerfallen auch die üblichen „Dimensionsbetrachtungen" in 2 Klassen: Diejenigen, welche mit den Längendimensionen 1. Art verknüpft sind, stehen auf der gleichen physikalischen Ebene wie die Invarianz – bzw. Kovarianzbetrachtungen im Zusammenhang mit der inhomogenen Lorentzgruppe oder anderen physikalischen Symmetriegruppen. Man wird erwarten, daß die physikalischen Größen analog zu dort irreduzible Darstellungen der Dilatationen bilden oder sich aus solchen aufbauen, daß entsprechende Erhaltungssätze gelten usw. Bei den Längendimensionen 2. Art gilt das zunächst alles nicht und der physikalische Hintergrund dieser Art von Längendimensionen macht eine ganz neuartige Analyse erforderlich, auf die hier aber nicht eingegangen werden soll. Wir werden uns nur mit Längendimensionen 1. Art beschäftigen.

Es sei noch bemerkt, daß alle diese Überlegungen in entsprechender Form auch für andere Grundgrößen wie z.B. Geschwindigkeit und Wirkung gelten sollten. Es ist eine sehr interessante Frage, welche physikalischen Konsequenzen die Dimensionen 1. Art hier haben werden.

Da es außer der Länge noch mindestens zwei weitere unabhängige Grundgrößen gibt, scheint die Längendimension einer bestimmten Größe von der Wahl der übrigen Grundgrößen abzuhängen. Das ist jedoch nicht der Fall! Denn da die Längendimension Ausdruck der Dilatationssymmetrie ist und sich diese Symmetrie dort, wo sie gilt, auch dynamisch manifestiert, können schließlich nur die Experimente entscheiden, welches die richtige Längendimension für eine physikalische Größe ist. Beispiele werden das später veranschaulichen.

Spezielle Relativitätstheorie und Quantentheorie legen es nahe, als weitere Grundgrößen Geschwindigkeit und Wirkung zu wählen. Wir werden das im folgenden tun. Viererimpulse und Drehimpulse haben dann die Längendimensionen -1 und 0. Entscheidend hierbei ist jedoch, daß Viererimpulse und Drehimpulse aufgrund des gruppentheoretischen Zusammenhanges der Dilatationen mit der inhomogenen Lorentzgruppe genau diese Längendimensionen haben müssen [1]).

Wir wollen im folgenden die obigen Betrachtungen anwenden auf die Energien und Impulse atomarer Teilchen, die aneinander gestreut werden. Solange wir Schwerpunktsenergien von der Größenordnung der Ruhemassen der beteiligten Teilchen haben, können wir keine Symmetrie im Sinne der Dilatationen (1) erwarten, da das atomare Ruhemassenspektrum nicht kontinuierlich ist. Werden die Energien jedoch so hoch, daß die Ruhemassen gegenüber den kinetischen Energien vernachlässigbar sind, so sollten die Dilatationen (1) wesentlich werden. Mathematisch streng genommen ist dies nur für über alle Grenzen wachsende Schwerpunktsenergien der Fall, doch kann man erwarten, daß die physikalischen Prozesse auch bei hinreichend hohen endlichen Energien durch ihr asymptotisches Verhalten schon wesentlich bestimmt sind. Um eine grobe Vorstellung zu kriegen, wann dies praktisch der Fall ist, betrachten wir die den Transformationen (1) zugeordnete Erhaltungsgröße D eines freien Teilchens mit Energie E und Impuls $\boldsymbol{p}$, das sich zur Zeit t am Orte $\boldsymbol{r}$ befindet. Diese Größe hat die Gestalt [2])

$$D = Et - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}.$$

Setzen wir hierin

$$\boldsymbol{r} = c^2(\boldsymbol{p}/E)t + \boldsymbol{b},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist, so erhalten wir

$$D = \frac{E_0^2}{E} t - b_p p.$$

Dabei ist E_0 die Ruheenergie des Teilchens und b_p die Projektion von $\boldsymbol{b}$ auf $\boldsymbol{p}$.

Man sieht: D ist dann praktisch konstant, wenn E so groß ist, daß während der beobachteten Flugdauer τ

$$\frac{E_0^2}{E} \tau \ll p b_p$$

gilt. Setzen wir $E/E_0 = \varepsilon$ und die Fluglänge $\tau c = \lambda$, so bedeutet dies

$$\varepsilon \gg \sqrt{\frac{\lambda}{b_p}}. \tag{5}$$

Nun ist $\boldsymbol{b}$ der Ort des Teilchens zur Zeit $t = 0$. Nach der klassischen Physik könnten wir $\boldsymbol{b} = 0$ wählen und hätten dann $\varepsilon = \infty$. Tatsächlich ist $\boldsymbol{b}$ nie gleich Null. Jedoch soll hier nicht mit der Unschärferelation argumentiert werden, obwohl das naheliegend ist. Denn die obigen Überlegungen zeigen, daß die Gültigkeitsbereiche der Quantenmechanik, für die ja der diskontinuierliche Teil des Spektrums einer physikalischen Größe, z.B. der Energie, besonders charakteristisch ist, und der Dilatationen (1) sich im allgemeinen nicht überschneiden, sondern ineinander übergehen. Man muß daher den Gültigkeitsbereich der Unschärferelation, die zunächst unmittelbar mit der Quantenmechanik verknüpft ist, im Zusammenhang mit der Konforminvarianz neu untersuchen. Das soll hier nicht geschehen und darum sind die unmittelbar folgenden Überlegungen als vorläufig anzusehen!

Experimentell ist die Situation so, daß man zur Bestimmung von b die Entfernung eines Punktes der Teilchenbahn von einem vorgegebenen Koordinatennullpunkt zu messen hat. Selbst wenn man durch meßtechnische Raffinessen diese Entfernung so klein wie möglich macht, ist man nicht in der Lage, sie ganz zum Verschwinden zu bringen; denn da die Bahn der Teilchen immer irgendwie sichtbar gemacht werden muß – in Blasenkammern, Funkenkammern, Zählern, Emulsionen usw. – hat die Spur immer eine endliche Dicke b_0, die ein rohes Maß für die untere Grenze ist, bis zu der b_p verkleinert werden kann, wenn wir annehmen, daß die mittlere Grenze der Meßgenauigkeit in Richtung der Bahn von der gleichen Größenordnung ist wie senkrecht zu ihr. Setzen wir b_p in der Ungleichung (5) gleich diesem b_0, so haben wir eine Abschätzung, von welchen Energien an D praktisch zeitlich konstant ist. Wenn wir außerdem den so nach unten abgegrenzten Energiebereich als durch die Dilatationen wesentlich mitbestimmt ansehen, so haben wir ein grobes Maß, von welchen Energien an wir mit der Dilatationsinvarianz zu rechnen haben. Zwei Beispiele:

a) Blasenkammer. Nehmen wir als mittlere Spurdicke $b_0 \approx 5 \cdot 10^{-2}$ cm und als Flugweg $\lambda \approx 50$ cm an, so haben wir $(\lambda/b_0)^{\frac{1}{2}} \approx 35$. Dieser Wert deutet an, daß man z.B. mit 30 GeV als Protonenenergie im Laborsystem die Richtigkeit der Dilatationsinvarianz noch nicht gut nachprüfen kann.

b) Am aussichtsreichsten zur Nachprüfung der im 2. Teil abgeleiteten experimentellen Konsequenzen scheinen im Augenblick, neben den geplanten Protonen-Beschleunigern mit einigen hundert GeV Protonenenergie, die e^-–e^- bzw. die e^-–e^+ Streuexperimente zu sein, bei denen gespeicherte Teilchenstrahlen gegenläufig aufeinander geschossen werden. ("colliding beam" Experimente in Stanford [6]) und Frascati [7]).) Denn bei diesen liegen die kinetischen Energien – einige hundert MeV – weit über den Ruheenergien der Teilchen. Da hier die Elektronen mit Zählern nachgewiesen werden, hat man für b_0 die mittlere Breite der Teilchenstrahlen im Wechselwirkungsbereich zu nehmen. Die betreffenden Daten [6]) von Stanford sind etwa $b_0 \approx 0.1$ cm, $\lambda \approx 100$ cm. Diese Werte führen zu der gleichen Abschätzung wie bei der Blasenkammer. Sie sind mit den genannten Beschleunigern erfüllbar. Aber auch solche Elektronenbeschleuniger, die zunächst nur einige GeV Elektronenenergien im Laborsystem zur Verfügung haben, wie z.B. der in Hamburg, sollten bei Elektron-Elektron Streuung schon einigermaßen brauchbare Resultate liefern.

Es sei noch erwähnt, daß die gleichen Überlegungen wie oben bei den speziellen konformen Transformationen (2) zu der Abschätzung $\varepsilon \gg \lambda/b_p$ führen. Diese Bedingung ist schärfer als die Bedingung (5). Das liegt daran, daß in den infinitesimalen Transformationen der Gruppe (2) die Zeit- und Ortskoordinaten quadratisch auftreten.

Wir wollen noch kurz auf die Frage eingehen, ob man nicht ähnliche Resultate wie oben erhält, wenn man statt von der Lorentzgruppe von den räumlichen Drehungen und der Galileigruppe ausgeht, also nichtrelativistische Kinematik voraussetzt. Geht man dabei in gleicher Weise vor wie in Ref. [2]), so sieht man, daß Dilatationen und spezielle konforme Transformationen, nun angewandt auf die räumlichen Koordinaten allein, keine Erhaltungssätze liefern, auch bei entsprechenden Grenzübergängen nicht. Die in Ref. [2]) angegebenen asymptotischen Erhaltungssätze setzen also die relativistische Kinematik wesentlich voraus. Man hat demnach, wenn sich unsere Überlegungen als richtig erweisen, mit wachsender Energie eine ständige Zunahme der Raum-Zeit Symmetrien, die Raum und Zeit in ebenfalls zunehmendem Maße miteinander verflechten, nämlich – abgesehen von den Translationen –

a) für $(E-E_0) \ll E_0$ räumliche Drehungen und Galileigruppe (E_0: Ruheenergie, E: Gesamtenergie),

b) für $E \approx E_0$ homogene Lorentzgruppe,

c) für $E \gg E_0$ homogene Lorentzgruppe, Dilatationen und spez. konforme Transformationen.

Es sei erwähnt, daß man als Spezialfall im nichtrelativistischen Bereich dann einen strengen Dilatationserhaltungssatz bekommt, wenn die Theorie, d.h. das betreffende

Wirkungsintegral, invariant ist gegenüber den Substitutionen

$$x^{i'} = \rho x^i, \qquad i = 1, 2, 3; \qquad t' = \rho^2 t.$$

Dies ist z.B. bei der freien Bewegung mit dem Wirkungsintegral

$$\int \mathrm{d}t \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2$$

der Fall. Der Erhaltungssatz hat die Form

$$2Et - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p}.$$

Man mag sich nach den obigen Ausführungen fragen, ob die Dilatationsinvarianz auch ein neues Licht auf die Struktur des Massenspektrums der atomaren Teilchen werfen kann. Da wir die Dilatationen (1) gerade dann für wesentlich halten, wenn die Massen vernachlässigbar sind, scheint das zunächst nicht der Fall zu sein. Es ist aber durchaus möglich, daß die aus den Dilatationen (1) folgenden Einschränkungen für das asymptotische Verhalten der physikalischen Größen ihrerseits wesentliche Konsequenzen für den nichtasymptotischen Bereich haben. Es sei nur daran erinnert, daß die Energiequantelung bei der Schrödingergleichung eng mit der Quadratintegrierbarkeit der Wellenfunktion zusammenhängt. Auch dies ist ja ganz wesentlich eine asymptotische Randbedingung.

Als ein aktuelles Beispiel hierfür betrachten wir die schwache Wechselwirkung im Rahmen des konventionellen Lagrange-Formalismus. Nimmt man an, daß diese im einfachsten Fall durch eine lokale 4-Fermionen-Wechselwirkung

$$g_1 \bar{\psi}_a O^i \psi_b \bar{\psi}_c O_i \psi_d$$

beschrieben wird, wobei die O_i Kombinationen der Diracschen γ-Matrizen bedeuten, so ist diese auch bei höchsten Energien nicht dilatationsinvariant, da die Kopplungskonstante g_1 eine von Null verschiedene Längendimension $(+2)$ von 2. Art hat.

Nimmt man dagegen in gewisser Analogie zur elektromagnetischen Wechselwirkung an, daß die schwache Wechselwirkung durch ein Vektorteilchen mit Masse und dem Feld $W_\mu(x)$ (sogenantes „Intermediäres Boson") vermittelt wird [8]), so hat die Kopplung die Form

$$g_2 \bar{\psi}_a O_\mu W^\mu \psi_b.$$

In diesem Fall hat die Kopplungskonstante g_2 die Längendimension 0 und man kann erwarten, daß die Theorie bei höchsten Energien dilatationsinvariant wird. Man sieht daraus, in welcher Weise die Dilatationen (1) die möglichen Formen der Wechselwirkungen einschränken können. In unserem Beispiel führen sie zusammen mit anderen Gesichtspunkten zur Einführung eines neuen Vektorteilchens innerhalb der schwachen Wechselwirkungen. Vorläufige Ergebnisse [9]) von Neutrino-Experimenten in Genf (CERN) scheinen tatsächlich die Existenz eines solchen Teilchens anzudeuten.

2. Das Verhalten von Streugrößen bei sehr hohen Energien

Es sollen nun einige experimentelle und theoretische Konsequenzen näher untersucht werden, die sich aus den Dilatationen (1) bei sehr hohen Energien ergeben.

Qualitativ kann man zunächst sagen, daß die Dilatationssymmetrie sicher dann verletzt ist, wenn man bis zu beliebig hohen, bisher nur von der kosmischen Strahlung erreichten kinetischen Energien, für starke Wechselwirkungen z.B. von 10^2, 10^3 GeV an aufwärts, immer neue Resonanzen vorfinden würde, ähnlich wie das bei niedrigen und mittleren Energien der Fall ist; denn Invarianz bzw. Kovarianz gegenüber Dilatationen impliziert glatten und monotonen Verlauf der Wirkungsquerschnitte in den Variablen, die dilatiert werden.

Die bisherigen experimentellen Daten [10]) scheinen einen solchen Verlauf anzudeuten, jedoch sind die vorhandenen Messungen noch viel zu ungenau und unvollständig, als daß man schon irgendwelche bündigen Schlüsse aus ihnen ziehen könnte. Aber selbst, wenn sich ein derartiger Verlauf bestätigen sollte, so ist die weitere Frage, ob dieser tatsächlich so ist, wie er von den Dilatationen bei sehr hohen Energien und sehr hohen Impulsübertragungen vorausgesagt wird. Systematische Abweichungen würden darauf hinweisen, daß bei derartigen Reaktionen eine elementare Länge im Spiele ist; denn beim Vorhandensein einer solchen Länge, die ja nur eine Längendimension 2. Art haben kann, gilt die Dilatationssymmetrie (1) sicher nicht. Mann kann daher aus dem asymptotischen Verlauf der Wirkungsquerschnitte auch Schlüsse über die Rolle einer elementaren Länge in Streuprozessen bei sehr hohen Energien und sehr großen Impulsübertragungen ziehen.

2.1. DER SATZ VON DER ERHALTUNG DER ZENTRALEN PHASEN

Wir betrachten im Schwerpunktsystem einen Stoßprozeß, bei dem 2 Teilchen mit Energien E_i und Impulsen $\boldsymbol{p}_i$, $i = 1, 2$, in n Teilchen mit den Energien E_j' und den Impulsen $\boldsymbol{p}_j'$, $j = 1, \ldots, n$, umgewandelt werden. Die zu den freien Teilchen gehörigen Erhaltungsgrößen der Dilatationen sind [2])

$$D_i = E_i t - \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{p}_i \text{ bzw. } D_j' = E_j' t' - \boldsymbol{r}_j' \cdot \boldsymbol{p}_j',$$

wobei $\boldsymbol{r}_i$ den Ort des i-ten Teilchens zur Zeit t vor der Streuung und $\boldsymbol{r}_j'$ den Ort des j-ten Teilchens nach der Streuung zur Zeit t' beschreiben. Ist nun die Wechselwirkung invariant gegenüber Dilatationen, so erwarten wir im Limes E_i, $E_j' \to \infty$ den Erhaltungssatz

$$\sum_{i=1}^{2} D_i \to \sum_{j=1}^{n} D_j'. \tag{6}$$

Es ist schon früher [2]) bemerkt worden, daß die D_i bzw. D_j' nicht anderes sind als die Phasen der den Teilchen zugeordneten Wellen im Zentrum des Wellenpaketes, d.h. am Orte des Teilchens. Bezeichnen wir diese Phase als „zentrale Phase", so kann man die Relation (6) als asymptotische Erhaltung der zentralen Phasen charakterisieren. Im Rahmen des Lagrange-Formalismus ist jede Wechselwirkung mit dimensionsloser

Kopplungskonstante dilatationsinvariant. Spezielle dilatationsinvariante Wechselwirkungen sind in Ref. [2]) angegeben.

Um die physikalischen Konsequenzen der Beziehung (6) an einem einfachen Beispiel zu veranschaulichen, betrachten wir die Streuung eines hochenergetischen skalaren Teilchens an einem Potential. Dabei nehmen wir zunächst an, daß in großer Entfernung vom Streuzentrum der Radialanteil der einlaufenden Partialwellen die Form

$$\frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-i(Et+rp)}$$

und der Radialanteil der auslaufenden Partialwellen die Form

$$\frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-i(Et-rp)+2i\delta_l(p)}$$

haben, wobei $\delta_l(p)$ die zur l-ten Partialwelle gehörige Streuphase ist. Ferner ist $\hbar = 1 = c$ gesetzt. Für das Zentrum des aus Kugelwellen aufgebauten Wellenpaketes gilt dann vor der Streuung

$$r = -vt, \qquad t < 0, \qquad v = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}, \qquad E = (p^2+m^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Man leitet dies am einfachsten durch Überlagerung zweier Kugelwellen mit den Phasen $(E+\mathrm{d}E)t+(p+\mathrm{d}p)r$ bzw. $(E-\mathrm{d}E)t+(p-\mathrm{d}p)r$ her [11]).

Nach der Streuung haben wir infolge der Wechselwirkung eine Retardierung [12]):

$$r' = vt-2\,\frac{\mathrm{d}\delta_l(p)}{\mathrm{d}p}, \qquad t > 0. \tag{8}$$

Setzen wir den Ausdruck (7) in $D = Et-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$ ein, so folgt $D \to 0$ für $p \to \infty$. Ist nun D bei sehr hohen Energien eine Erhaltungsgröße, so muß nach der Streuung ebenfalls $D' \to 0$ gelten. Wegen der Relation (8) bedeutet dies

$$p\,\frac{\mathrm{d}\delta_l(p)}{\mathrm{d}p} \to 0 \qquad \text{für } p \to \infty. \tag{9}$$

Hieraus folgt zunächst die schwächere Aussage

$$\frac{\mathrm{d}\delta_l(p)}{\mathrm{d}p} \to 0 \qquad \text{für } p \to \infty. \tag{10}$$

Aufgrund der Beziehung (8) heißt dies, daß die durch die Wechselwirkung verursachte Retardierung der Teilchenbewegung bei sehr hohen Energien verschwindet. Zeitlich bewegen sich die hochenergetischen Teilchen demnach wie freie Teilchen. Dabei können natürlich trotzdem Richtungsänderungen auftreten. Die Situation ist in dieser Hinsicht ganz ähnlich wie bei elastischen Stößen von Massenpunkten in der Mechanik.

Da die Streuphase δ_l sich in der Nähe einer Resonanz stark mit der Energie ändert, also ihre Ableitung nach p dort wesentlich von Null verschieden ist, bedeutet die Aussage (10), daß bei sehr hohen Energien keine Resonanzen mehr auftreten können. Dies bestätigt unsere obigen qualitativen Überlegungen.

Wir werden diese hier im Spezialfall der bei sehr hohen Energien sicher ziemlich unphysikalischen Potentialstreuung gewonnenen Ergebnisse später allgemeiner herleiten.

Die Beziehung (9) wird erfüllt, wenn sich $\delta_l(p)$ aus einer endlichen Summe von Ausdrücken der Form

$$A_l p^{\beta_l} (\log p)^{\gamma_l}, \qquad A_l \neq 0 \text{ und const},$$

zusammensetzt, wobei entweder die Bedingungen $\beta_l = 0$ und $\gamma_l < 1$ oder $\beta_l < 0$ und γ_l beliebig reell gelten. (Die Bedingungsgleichungen für ε in Ref. [2]) müssen $\varepsilon \geqq 0$ lauten.) Wir nehmen an, daß für sehr große p alle diese Summanden bis auf einen vernachlässigt werden können. Das heißt, wir setzen für die Streuphasen bei sehr großen p eine asymptotische Entwicklung

$$\delta_l(p) \approx \delta_l^{(0)}(p) + \delta_l^{(1)}(p) + \ldots, \qquad \delta_l^{(\nu)} \neq 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

mit den Eigenschaften

$$\left| \frac{\delta_l(p)}{\delta_l^{(0)}(p)} - 1 \right| < \varepsilon, \qquad \left| \frac{\delta_l(p) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \delta_l^{(\nu)}(p)}{\delta_l^{(n)}(p)} - 1 \right| < \varepsilon, \qquad n \geqq 1,$$

voraus, wobei

$$\delta_l^{(0)}(p) = A_l p^{\beta_l} (\log p)^{\gamma_l}, \qquad A_l \neq 0, \tag{11}$$

$\beta_l = 0, \quad \gamma_l < 1$ oder $\beta_l < 0$ und γ_l beliebig reell.

Die positive Zahl ε kann beliebig vorgegeben werden.

Der Ausdruck (11) führt zu der folgenden auch für spätere Beispiele charakteristischen Überlegung: Da die einzige unabhängige Variable p von δ_l die Längendimension -1 hat, δ_l selbst aber dimensionslos ist, so muß die Konstante A_l die Längendimension des Faktors $p^{\beta_l}(\log p)^{\gamma_l}$ durch ihre eigene kompensieren, falls nicht $\beta_l = \gamma_l = 0$ gilt. Nun hat p sicherlich eine Längendimension 1. Art, die Konstante A_l kann aber nur eine Längendimension 2. Art haben, da sie gemäß ihrer Definition lediglich von energieunabhängigen Parametern abhängt, von denen hier nur Kopplungskonstanten mit einer von Null verschiedenen Längendimension und Ruhemassen in Frage kommen. Der erste Fall ist ausgeschlossen, weil die entsprechenden Wechselwirkungen dann selbst bei höchsten Energien nicht dilatationsinvariant sein können. Der zweite Fall ist ausgeschlossen gemäß unserer Hypothese, daß bei sehr hohen Energien die Ruhemassen keine Rolle spielen. So bleiben in Gl. (11) nur die Werte $\beta_l = 0$ und $\gamma_l = 0$ übrig, d.h.

$$\delta_l(p) \sim A_l = \text{const} \neq 0. \tag{12}$$

Hieraus folgt, daß sogar $\delta_l(p) \to A_l$ gilt.

Man kann die Relation (12) auch so interpretieren, daß

$$p\,\frac{\mathrm{d}\delta_l^{(0)}}{\mathrm{d}p} = 0.$$

Etwas umständlich, aber verallgemeinerungsfähig ausgedrückt heißt das: Die asymptotische Darstellung $\delta_l^{(0)}$ der Streuphase δ_l für große p bildet eine irreduzible Darstellung der Dilatationen, nämlich eine in p homogene Funktion vom Grade Null.

Man beachte, daß die Überlegungen, die zu dem Ergebnis (12) geführt haben, nicht an die zunächst vorausgesetzte Gestalt (11) gebunden sind, sondern für jede mit der Bedingung (9) verträgliche Streuphase gelten, welche Form $\delta_l^{(0)}$ auch haben mag.

Als rechenbares Beispiel betrachten wir die Streuung eines skalaren Teilchens der Masse m und Ladung e an einem von der Ladung Ze erzeugten Coulomb-Potential. Die zugehörige Klein-Gordon-Gleichung ist dilatationsinvariant, wenn wir die Ruhemasse vernachlässigen.

Wie man weiß, haben die exakten Streuphasen dieses Problems für alle Energien die Form

$$\delta_l(p) = \arg \Gamma(\lambda+1+i\kappa), \qquad \kappa = \alpha Z\,\frac{E}{p}, \qquad (13)$$
$$\lambda = \left((l+\tfrac{1}{2})^2-\alpha^2 Z^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei α die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante ist und $E = (p^2+m^2)^{\frac{1}{2}}$.

Schließen wir den trivialen Fall $Z = 0$ aus, so folgt aus Gl. (13) wegen $\kappa \to \alpha Z$ für $p \to \infty$, daß bei der Klein-Gordon-Gleichung mit Coulomb-Potential tatsächlich

$$\delta_l(p) \to A_l = \arg \Gamma(\lambda+1+i\alpha Z) = \mathrm{const} \neq 0$$

für $p \to \infty$ gilt.

Nun tritt allerdings beim Coulomb-Potential zu den zuerst diskutierten Phasen der ein- bzw. auslaufenden Kugelwellen noch der logarithmische Term $-\kappa \log(2pr)$ bzw. $\kappa \log(2pr)$, so daß wir die zu den Gln. (7) bzw. (8) führenden Überlegungen in Ref. [11]) hierfür verallgemeinern müssen. Sie liefern die zunächst wesentlich komplizierteren Ergebnisse

$$r = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\,t + \frac{\alpha Z}{p}\left[\frac{E}{p} + \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} - \frac{E}{p}\right)\log 2rp\right], \qquad t < 0, \qquad (14)$$

$$r' = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\,t' + \frac{\alpha Z}{p}\left[\frac{E}{p} + \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} - \frac{E}{p}\right)\log 2rp\right] - 2\,\frac{\mathrm{d}\delta_l(p)}{\mathrm{d}p}, \qquad t' > 0. \qquad (15)$$

Der neue zu αZ proportionale Summand ist ein Ausdruck dafür, daß in einem Coulomb-Potential ein Teilchen sich auch in großer Entfernung vom Streuzentrum nicht frei bewegt. Für $p \gg m$ folgt jedoch wegen $E = (p^2+m^2)^{\frac{1}{2}}$ aus der Gl. (14)

$$r = -\frac{p}{E}\,t + \alpha Z\left(\frac{E}{p^2} - \frac{m^2}{p^3}\log 2pr\right). \qquad (16)$$

Für sehr große p kann man den Ausdruck in der Klammer vernachlässigen und das Teilchen bewegt sich daher in diesem Grenzfall auch beim Coulomb-Potential in großer Entfernung vom Streuzentrum als freies Teilchen.

Setzt man nun in die Größe $D = Et - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}$ für r die Form (16) unter der für sehr große p sicherlich guten Näherung ein, daß $\boldsymbol{r}$ antiparallel zu $\boldsymbol{p}$ ist, so erhalten wir für D den sehr interessanten Wert

$$D \to \alpha Z \text{ für } p \to \infty. \tag{17}$$

Die Erhaltungsgröße D der Dilatationen ist also in diesem Fall ein ganzzahliges Vielfaches der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten.

Die weiteren Schlüsse müssen etwas genauer analysiert werden: Sehen wir zunächst von den Streuphasen in Gl. (15) ab, so lautet die zu (16) analoge Gleichung für r',

$$r' = \frac{p}{E}\, t' + \alpha Z \frac{E}{p^2}. \tag{18}$$

Hier haben wir auch noch den massenbehafteten Summanden weggelassen. Da er für $p \to \infty$ stärker als p^{-2} gegen Null geht, spielt er für das weitere keine Rolle.

Hätten nun die Zeitskalen von t und t' denselben Nullpunkt, so würde das für die bis in die unmittelbare Nähe des Streuzentrums extrapolierten Gln. (16) und (18) bedeuten, daß gleichzeitig $r_0 = \alpha ZE/p^2$ und $r_0' = \alpha ZE/p^2$ (wegen $r, r' > 0$ gelten die folgenden Überlegungen zunächst nur für $Z > 0$, d.h. für abstoßendes Potential. Man sieht jedoch sofort, daß sie sich ohne Schwierigkeiten auf den Fall $Z < 0$ übertragen lassen). Das ist jedoch nicht möglich, weil bei diesen extrem hohen Energien alle Teilchen einerseits fast unabgelenkt weiterfliegen, andererseits aber höchstens Lichtgeschwindigkeit haben können. Dies bedeutet, daß ein Teilchen, um von $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}_0'$ zu kommen, annähernd die Strecke $r_0 + r_0' = 2\alpha ZE/p^2$ zu durchfliegen hat. Dafür benötigt es die Zeit $\Delta t = 2\alpha ZE^2/p^3$ (es ist klar, daß wir hier nicht von der wirklichen Bewegung des Teilchens in der Nähe des Streuzentrums reden, sondern nur von einer durch das Verhalten für große Abstände nahegelegten Interpolation, die uns die Zeitbilanz in Ordnung bringt). Um dieses Δt unterscheidet sich daher der Nullpunkt der Zeitskalen von t und t'. Es gilt also

$$t' = t - \Delta t, \qquad \Delta t = 2\alpha Z \frac{E^2}{p^3}.$$

Setzen wir dieses t' in die Gl. (18) ein, so folgt für das entsprechende D' ebenfalls $D' \to \alpha Z$, wenn $p \to \infty$.

Berücksichtigen wir nun außerdem noch den Streuphasenterm in Gl. (15), so muß für diesen wiederum die Beziehung (9) gelten, in Übereinstimmung mit der expliziten Form (13).

2.2. DIE ELASTISCHE STREUUNG SKALARER TEILCHEN

Wir beginnen mit einigen Definitionen und Bezeichnungen: Die ebenen Wellen

$$e_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{ipx}$$

seien so normiert, daß

$$\langle p|k\rangle \equiv i \int d^3\boldsymbol{x}(e_p^*(x)\partial_0 e_k(x) - e_k(x)\partial_0 e_p^*(x)) = 2p_0\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}).$$

Spalten wir von dem lorentzinvarianten S-Matrixelement, das den Übergang vom Anfangszustand $|\mathrm{i}\rangle = |p_1, p_2\rangle$ in den Endzustand $|\mathrm{f}\rangle = |p_1', p_2'\rangle$ beschreibt, in üblicher Weise die durchgehende Welle und die für die Energie- und Impulserhaltung sorgende δ-Funktion ab, so haben wir

$$\langle \mathrm{f}|S|\mathrm{i}\rangle = \langle \mathrm{f}|\mathrm{i}\rangle + (2\pi)^4 i\delta(p_1'+p_2'-p_1-p_2)\langle \mathrm{f}|M|i\rangle.$$

Aus der Unitarität der S-Matrix folgt

$$\frac{1}{i}(\langle \mathrm{f}|M|\mathrm{i}\rangle - \langle \mathrm{i}|M|\mathrm{f}\rangle^*) = (2\pi)^4 \sum_{n,\,l_n} \delta(l_n - p)\langle l_n|M|\mathrm{f}\rangle^*\langle l_n|M|\mathrm{i}\rangle, \tag{19}$$

wobei

$$\sum_{l_n} \delta(l_n)A(l_n) \equiv \int \frac{d^3\boldsymbol{k}_1}{2k_{10}} \cdots \frac{d^3\boldsymbol{k}_n}{2k_{n0}} \delta(l_n)A(l_n),$$

$$p = p_1+p_2, \qquad l_n = k_1 + \ldots + k_n, \qquad k_n = (k_{n0}, \boldsymbol{k}_n).$$

Der Index n durchläuft sämtliche Anzahlen von Teilchen, die bei Berücksichtigung aller Erhaltungssätze aus den beiden Primärteilchen vermöge der betrachteten Wechselwirkung erzeugt werden können.

Im Schwerpunktsystem gilt für den differentiellen Streuquerschnitt der elastischen Streuung eines der beiden Teilchen in das Raumwinkelelement $d\Omega$

$$d\sigma_{el} = |f(s,t)|^2 d\Omega = \frac{1}{s}|F(s,t)|^2 d\Omega \tag{20}$$

mit

$$f(s,t) = \frac{1}{\sqrt{s}} F(s,t), \qquad F(s,t) = \tfrac{1}{4}(2\pi)^5\langle \mathrm{f}|M|\mathrm{i}\rangle.$$

Hierbei ist s die quadrierte Gesamtenergie der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem: $s = (p_1+p_2)^2$, und t die lorentzinvariante quadrierte Impulsübertragung: $t = (p_1 - p_2')^2 = -2q^2(1-\cos\vartheta)$, wobei ϑ der Streuwinkel im Schwerpunktsystem und $q^2 = |\boldsymbol{p}_1|^2$.

Aus der Unitarität (19) folgt für den totalen Wirkungsquerschnitt das optische Theorem

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{4}{q}\pi \,\mathrm{Im} f(s, t=0). \tag{21}$$

Wir fragen nun nach den Einschränkungen, die $F(s, t)$ aufgrund der Dilatationen auferlegt werden, wenn entweder s oder sowohl s wie auch $-t$ wesentlich größer als die Quadrate der für den Prozeß charakteristischen Ruhemassen sind. Diese charakteristischen Ruhemassen sind im allgemeinen nicht die Massen der gestreuten Teilchen selbst, sondern die Massen von Zwischenzuständen, wie sie z.B. in der Unitaritätsrelation (19) auftreten. Derartige Massen können bei sehr hohen Energien ebenfalls sehr groß werden, nämlich dann, wenn Teilchen-Antiteilchensysteme als Zwischenzustände vorkommen. Man wird jedoch erwarten, daß solche Zustände selbst bei sehr hohen Energien ab einer gewissen Größe praktisch keine Rolle spielen, man also in guter Näherung mit einer endlichen maximalen diskreten Masse rechnen kann. So ist es z.B. sehr unwahrscheinlich, daß Teilchen-Antiteilchen-Paare schwerer Atome einen merklichen Einfluß auf die Elektron-Elektron Streuung haben [13]).

Nennen wir die größte noch zu berücksichtigende Ruhemasse M, so lauten die beiden genannten Fälle:

a) $$s \gg M^2, \qquad -t \lesssim M^2,$$

b) $$s, -t \gg M^2.$$

Bei den Dilatationen (1) gehen die räumlichen Impulse $\boldsymbol{p}_i$ bzw. $\boldsymbol{p}_i'$ der beiden betrachteten Teilchen in $\rho^{-1}\,\boldsymbol{p}_i$ bzw. $\rho^{-1}\,\boldsymbol{p}_i'$, $i = 1, 2$, über. Sind außerdem ihre Ruhemassen vernachlässigbar, so haben wir für die Viererimpulse

$$p_i \to \rho^{-1} p_i, \qquad p_i' \to \rho^{-1} p_i', \qquad i = 1, 2. \tag{22}$$

Hierbei setzen wir für die Werte von ρ voraus, daß sie die Größenordnung der Viererimpulse nicht soweit herabsetzen, daß unsere Voraussetzung, nämlich Vernachlässigbarkeit der Ruhemassen, hinfällig wird.

Aus den Gln. (22) folgt für die Streuamplitude

$$F(s, t) \to F(\rho^{-2} s, \rho^{-2} t).$$

Die Frage ist nun, wie sich $F(s, t)$ transformiert!

So wie die physikalischen Größen immer eine irreduzible Darstellung der mit ihnen verknüpften Symmetriegruppe bilden oder sich in einfacher Weise aus diesen zusammensetzen, werden wir auch hier annehmen, daß die Gestalt von $F(s, t)$ bei sehr hohen Energien eng mit irreduziblen Darstellungen der Dilatationen, nämlich den homogenen Funktionen, zusammenhängt. Da es sich hier jedoch um eine asymptotische Symmetrie handelt, haben wir etwas anders als üblich vorzugehen. Wir betrachten nacheinander die Fälle a) und b):

a) Wir setzen zunächst voraus, daß bei festem, sonst aber beliebigem t und sehr großem s für $F(s, t)$ eine asymptotische Entwicklung in s existiert:

$$F(s, t) \approx F_0(s, t) + F_1(s, t) + \ldots . \tag{23}$$

In Verallgemeinerung des Ergebnisses von Abschnitt 2.1 nehmen wir nun an, daß

$F_0(s, t)$ in s eine irreduzible Darstellung der Dilatationen (1) bildet, d.h. homogen in s ist:

$$F_0(s, t) = \beta(t) s^{\alpha(t)},$$

also

$$F(s, t) \overset{(s)}{\sim} \beta(t) s^{\alpha(t)} \tag{24}$$

$$\text{für } s \gg M^2 \text{ und } -t \lesseqgtr M^2.$$

Das (s) über dem Zeichen $\sim$ soll bedeuten, daß es sich um eine asymptotische Entwicklung in s handelt.

Da unsere Voraussetzungen im Falle a) keinerlei Aussagen über die t-Abhängigkeit von $F(s, t)$ zulassen, so können sowohl α wie β Funktionen von t sein. Außerdem sind beide Funktionen zunächst komplexwertig. Aufgrund des optischen Theorems (21) kann man jedoch sofort schließen, daß $\operatorname{Im} \alpha(0) = 0$ sein muß, da sonst der totale Wirkungsquerschnitt einer Winkelfunktion mit $\log s$ im Argument proportional sein, also periodisch negativ werden würde, was unsinnig ist. Ist nun $\operatorname{Im} \alpha$ von t unabhängig, so sind wir fertig. Andernfalls multipliziert sich F_0 (s, t) bei $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$ für $t \neq 0$ mit einem Phasenfaktor, der zumindestens asymptotisch keinen Einfluß auf den Wirkungsquerschnitt hat. Wir beschränken uns daher von vorneherein auf reelle α. Wir sind so im Einklang mit den Betrachtungen, welche die asymptotische Form (24) unter bestimmten Voraussetzungen aus analytischen Eigenschaften in der komplexen Drehimpulsebene herleiten [14]) und außerdem mit den Ergebnissen von Ref. [1]), bei denen die Eigenwerte des Dilatationsoperators immer rein imaginär waren. Es sei jedoch betont, daß alle unsere Überlegungen zunächst nur für physikalische Werte von s und t im s-Kanal, nämlich $s > 0$, $t \leqq 0$ gelten, wir hier also keine Aussagen über das Verhalten von analytischen Fortsetzungen machen!

Man sieht an dem Beispiel (24) in charakteristischer Weise den Unterschied zwischen den Längendimensionen 1. und 2. Art: $F_0(s, t)$ hat die Gesamtlängendimension 0. Diese setzt sich jedoch aus zwei additiven Anteilen zusammen: der von dem Faktor s^α herrührende Anteil -2α ist offensichtlich von 1. Art, der im Faktor β enthaltene Anteil 2α kann dagegen nur von 2. Art sein. Das hängt damit zusammen, daß wir hier, im Gegensatz zu den Überlegungen in Abschnitt 2.1, auch bei höchsten Energien außer der Variablen s, verglichen mit der die quadrierten Ruhemassen keine Rolle spielen, immer auch noch die Variable t, der gegenüber die quadrierten Ruhemassen nicht vernachlässigbar sind, als Träger von Längendimensionen haben. Aus diesem Grunde können wir auch über den Wert von α nichts anderes sagen, als daß es sich um eine reelle Zahl handelt.

Darstellungstheoretisch ist das so zu interpretieren: Da $F_0(s, t)$ eine Invariante bezüglich der inhomogenen Lorentzgruppe ist und wir außerdem die speziellen konformen Transformationen (2) hier ganz weggelassen haben, entnimmt man unmittelbar aus der Lie-Algebra der konformen Gruppe [1]), daß in diesem Fall die Eigenwerte des Dilatationsoperators beliebig sein können. Man sieht, daß es auf diese

Weise auch kontinuierliche Längendimensionen geben kann. Das ist nicht überraschend, wenn man bedenkt, daß auch die üblichen ganzzahligen Längendimensionen [1]) nichts anderes sind als Kennzeichen für spezielle Darstellungen der Dilatationen (1).

Man kann demnach unter bestimmten Voraussetzungen sozusagen darstellungstheoretisch zwischen den ganzzahligen Längendimensionen interpolieren. Hier wird nun der Zusammenhang mit den komplexen Drehimpulsen in der Streutheorie sichtbar. Dort handelt es sich ja auch um eine Interpolation zwischen den ganzzahligen Werten $l = 0, 1, \ldots$. Der in diesem Fall wesentliche Zusammenhang zwischen Dilatationen und räumliche Drehungen, auf dessen mathematischen Einzelheiten wir hier nicht eingehen wollen, besteht darin, daß beide Gruppen elementweise miteinander vertauschen und die entsprechenden Darstellungen daher gemeinsam diagonalisiert werden können.

Aufgrund des optischen Theorems (21) folgt aus der Relation (24) für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \sim \frac{4}{q}\pi\beta(0)s^{\alpha(0)-\frac{1}{2}}.$$

Über die Zahlenwerte von $\alpha(0)$ und $\beta(0)$ lassen unsere Voraussetzungen keinerlei Aussagen zu. Wenn daher die totalen Wirkungsquerschnitte für $s \to \infty$ gegen konstante von Null verschiedene Werte gehen und damit feste Längen definieren, so ist das kein Widerspruch zu unseren Betrachtungen!

b) Bei sehr großen s und $-t$ setzen wir analog zum Fall a) voraus, daß eine asymptotische Darstellung $F_{00}(s, t)$ von $F(s, t)$ in s und t existiert:

$$\left|\frac{F(s,t)}{F_{00}(s,t)} - 1\right| < \varepsilon \qquad \text{für } s, -t \gg M^2.$$

Aufgrund der gleichen Überlegungen wie oben nehmen wir jetzt an, daß $F_{00}(s, t)$ homogen in s und t ist:

$$F_{00}(\rho^{-2}s, \rho^{-2}t) = \rho^k F_{00}(s, t).$$

Da F_{00} gemäß unserer Voraussetzung, daß asymptotisch alle Ruhemassen vernachlässigt werden können, keine Ruhemassen enthält, sind s und t hier die einzigen Träger von Längendimensionen. Da F_{00} wegen der Beziehung (20) die Längendimension 0 hat, muß daher $k = 0$ sein, d.h.

$$F_{00}(s, t) = F_{00}(s/t). \tag{25}$$

Nehmen wir andererseits an, daß die asymptotische Darstellung (24) für beliebig große negative t gilt, so haben wir entsprechend zur Relation (25)

$$F(s, t) \sim A(s/t)^a \text{ für } s, -t \gg M^2, \tag{26}$$

wobei $a = \alpha(-\infty)$ und A eine Konstante bedeuten.

Vorausgesetzt nun, daß sowohl die Darstellung (25) wie die Darstellung (26) gelten, so läßt sich leicht zeigen, daß

$$F_{00}(s/t) \sim A(s/t)^a \text{ und } A(s/t)^a \sim F_{00}(s, t).$$

Da für großes s und festen Streuwinkel $\vartheta \neq 0$ t proportional zu s ist, so folgt aus den asymptotischen Darstellungen (25) bzw. (26)

$$F(s, t) \sim B = \text{const. für } s \to \infty \text{ bei festem } \vartheta \neq 0. \tag{27}$$

Die Konstante B ist eine Funktion des Streuwinkels ϑ und der Stärke der Wechselwirkung.

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (20) bedeutet die Beziehung (27)

$$d\sigma_{el}(s, \vartheta) \overset{(s)}{\sim} \frac{|B(\vartheta)|^2}{s} d\Omega \qquad \text{für festes } \vartheta \neq 0. \tag{28}$$

2.3. INELASTISCHE PROZESSE SKALARER TEILCHEN

Die allgemeinen Überlegungen, die bei der elastischen Streuung auf die asymptotischen Formen (24) und (26) bzw. (27) führten, lassen sich offensichtlich unmittelbar auf inelastische Prozesse übertragen.

Wir betrachten, wieder im Schwerpunktsystem, eine Reaktion, bei der 2 skalare Teilchen in n ebenfalls skalare Teilchen, $n \geqq 2$, umgewandelt werden. Die entsprechende lorentzinvariante Reaktionsamplitude sei F_n. Wegen der $n+2$ Relationen $p_i^2 = m_i^2$ und der 10 Erhaltungssätze aufgrund der inhomogenen Lorentzgruppe hängt F_n von $4(n+2)-(n+2)-10 = 3n-4 = r$ unabhängigen lorentzinvarianten Skalarprodukten der $n+2$ Viererimpulse p_i ab. Wir bezeichnen diese Argumente mit s_i, $i = 1, \ldots, r$, und schließen analog wie in Abschnitt 2.2: $F_n(s_1, \ldots, s_r)$ wird asymptotisch homogen in den h Argumenten s_j, $0 \leqq h \leqq r$, für die $s_j \gg M^2$:

$$F_n(s_1, \ldots, s_r) \overset{(s_{j_1}, \ldots, s_{j_k})}{\sim} \gamma(s_k; k \neq j_\kappa) s_{j_1}^{\alpha_{j_1}(s_k; k \neq j_\kappa)} \ldots s_{j_{\kappa h}}^{\alpha_{j_h}(s_k; k \neq j_\kappa)}. \tag{29}$$

Hierbei soll die Schreibweise $\gamma(s_k; k \neq j_\kappa)$ usw. bedeuten, daß γ von den Argumenten s_k abhängt, für die $k \neq j_\kappa$, $\kappa = 1, \ldots, h$, ist. Da im allgemeinen einige der s_j negativ sind, wollen wir hier zunächst über die Realitätseigenschaften der zugehörigen α_j keine weiteren Aussagen machen als daß sie komplex sein können. Ob und in welcher Weise die α_j tatsächlich von den Argumenten s_k abhängen, können wir aufgrund der hier gemachten Voraussetzungen nicht sagen.

Im Falle $h = r$ bezeichnen wir die jetzt konstanten Größen α_j mit a_j, $j = 1, \ldots, r$. Da F_n die Längendimension $n-2$ hat, wie man z.B. aus der Unitaritätsrelation (19) ablesen kann, so muß aus den gleichen Gründen wie bei der elastischen Streuung für die a_j

$$\sum_{j=1}^{r} a_j = \tfrac{1}{2}(2-n) \tag{30}$$

gelten.

Der Fall $h = r$ läßt sich z.B. dadurch realisieren, daß man bei festen von Null verschiedenen Winkeln zwischen sämtlichen Richtungen der primären und sekundären Teilchen die Gesamtenergie $\sqrt{s} = \sqrt{s_1}$ im Schwerpunktsystem genügend groß macht. Da dann alle übrigen s_j, $j = 2, \ldots, r$, proportional zu s sind, so folgt aus der Beziehung (30)

$$F_n(s_1, \ldots, s_r) \sim (\sqrt{s})^{2-n} \tag{31}$$

für feste nicht verschwindende Winkel zwischen den Richtungen aller an der Reaktion beteiligten Teilchen.

Die Relation (31) enthält die plausible Aussage, daß die Streuamplitude bei festen Winkeln umso stärker mit der Energie gegen Null geht, je größer die Anzahl der erzeugten hochenergetischen Teilchen ist.

2.4. DAS HOCHENERGIE-VERHALTEN DER PARTIALWELLEN

Die obigen Überlegungen für das asymptotische Verhalten der Streuamplituden lassen sich offenbar auf alle Größen übertragen, die Funktionen von Viererimpulsen irgendwelcher Teilchen sind, z.B. Partialwellen, Formfaktoren etc. Wir wollen hier noch kurz auf die Partialwellen eingehen.

Um die Winkelabhängigkeit von $F(s, t) = F(s, \vartheta)$ zu separieren, entwickeln wir nach Legendre-Polynomen P_l:

$$F(s, \vartheta) = \frac{1}{q}\sqrt{s} \sum_l (2l+1) F_l(s) P_l(\cos \vartheta). \tag{32}$$

Hieraus folgt für den elastischen und totalen Wirkungsquerschnitt der l-ten Partialwelle

$$\sigma_{\mathrm{el}}^{(l)}(s) = \frac{4\pi}{q^2}(2l+1)|F_l(s)|^2, \tag{33}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^{(l)}(s) = \frac{4\pi}{q^2}(2l+1)\,\mathrm{Im}\, F_l(s).$$

Die weitere Argumentation ist im wesentlichen dieselbe wie bei den Streuphasen in Abschnitt 2.1. Wir können uns hier deshalb kurz fassen: Da $F_l(s)$ von den Viererimpulsen nur über die Variable s abhängt, zum anderen die Längendimension 0 hat, so gilt analog zu früher

$$F_l(s) \overset{(s)}{\sim} g_l = \text{const.} \tag{34}$$

Falls F_l nicht identisch für alle s verschwindet, muß $g_l \neq 0$ sein.

Es sei noch erwähnt, daß der Grenzwert (34) mit der Unitarität (19) verträglich ist. Berücksichtigt man nämlich, daß bei PT-Invarianz $\langle \mathrm{i}|M|\mathrm{f}\rangle = \langle \mathrm{f}|M|\mathrm{i}\rangle$ gilt, so folgt, wenn man die Entwicklung (32) in die Relation (19) einsetzt,

$$\mathrm{Im}\, F_l(s) \geqq |F_l(s)|^2. \tag{35}$$

Das bedeutet $|g_l| \leqq 1$. Die Aussage (34) steht dazu nicht im Widerspruch.

Für die Inelastizität

$$r_l(s) = \frac{\sigma_{\text{tot}}^{(l)}(s)}{\sigma_{\text{el}}^{(l)}(s)} = \frac{\operatorname{Im} F_l(s)}{|F_l(s)|^2} \geqq 1$$

folgt aus den Beziehungen (34) und (35), daß $r_l(s)$ endlich bleibt, wenn $s \to \infty$.

Einigen Teilnehmern an der Tagung für Hochenergiephysik im Oktober 1963 auf dem Ruhestein, Schwarzwald, danke ich für Diskussionen und kritische Bemerkungen. Namentlich Herrn Professor G. Höhler bin ich für die Einladung zu dieser Tagung besonders dankbar.

Dank schulde ich ebenfalls meinem Freunde M. Rinke für zahlreiche Diskussionen und eine kritische Durchsicht des Manuskriptes.

Schließlich danke ich vor allem Herrn Professor F. Bopp für sein ständiges und förderndes Interesse an dieser Arbeit.

Literatur

1) H. A. Kastrup, Ann. der Phys. **9** (1962) 388
2) H. A. Kastrup, Phys. Lett. **3** (1962) 78
3) H. A. Kastrup, Phys. Lett. **4** (1963) 56
4) H. Mitter, private Mitteilung
5) N. Bohr, Naturwiss. **16** (1928) 245
6) G. K. O'Neill, Proc. of Int. Conf. on High-Energy Accelerators and Instrumentation, CERN (1959) p. 125;
B. Richter, Proc. Int. Conf. on Theoretical Aspects of Very High-Energy Phenomena, CERN (1961) p. 57
7) C. Bernardini, G. F. Corazza, G. Ghigo and B. Touschek, Nuovo Cim. **18** (1960) 1293;
B. Touschek, Proc. Int. Conf. on Theoretical Aspects of Very High-Energy Phenomena, CERN (1961) p. 67
8) R. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109** (1958) 193;
T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **119** (1960) 1410
9) H. Faissner, private Mitteilung
10) D. H. Perkins, Proc. Int. Conf. on Theoretical Aspects of Very High-Energy Phenomena, CERN (1961) p. 99
11) E. P. Wigner, Phys. Rev. **98** (1955) 145
12) L. Eisenbud, Dissertation, Princeton University (1948), unveröffentlicht; zitiert in Ref. [11])
13) Y. S. Tsai, Phys. Rev. **120** (1960) 269
14) R. Oehme, Proc. Scottish Universities' Summer School in Physics (1963) p. 129; hier finden sich weitere Literaturangaben