Zur physikalischen Deutung und darstellungstheoretischen Analyse der konformen Transformationen von Raum und Zeit[1])

Von H. A. Kastrup

Inhaltsübersicht

Es wird versucht, die Skalentransformationen und speziellen konformen Transformationen von Raum und Zeit als ortsunabhängige und ortsabhängige Umeichungen der Längeneinheit zu interpretieren. Dabei zeigt sich, daß die Zuordnung von Längendimensionen zu physikalischen Größen gleichbedeutend ist mit der Forderung, daß diese zu einer Darstellung der Skalentransformationen gehören. Eine darstellungstheoretische Analyse mittels der Cartanschen Methode der höchsten Gewichte ergibt, daß zu Tensoren als Längendimensionen immer ganze Zahlen gehören.

Alle Darstellungen endlichen Grades der 15parametrigen konformen Gruppe lassen sich mittels zweier 4dimensionaler Spindarstellungen konstruieren, indem man von der schon bekannten Eigenschaft der Dirac-Algebra Gebrauch macht, daß diese sich als Lie-Algebra der konformen Transformationen von Raum und Zeit auffassen läßt. Dabei hat man solche Kombinationen der γ-Matrizen, wie sie auch in der Theorie der schwachen Wechselwirkungen (V—A-Kopplung) auftreten.

Stellt man die Lie-Algebra der konformen Gruppe im Raum der Funktionen mit den Koordinaten x^μ dar, so zeigt sich, daß dies nicht mit einer positiv definiten Metrik möglich ist und daß die Eigenvektoren der Energie-Impuls-Operatoren, die ebenen Wellen, kein vollständiges System bilden. Es scheint, daß die physikalisch interessanten Darstellungen unendlichen Grades der konformen Gruppe nicht die unitären sind.

Ferner besteht ein Zusammenhang zwischen den vier Operatoren, die die infinitesimalen speziellen konformen Transformationen erzeugen, und den quantenmechanischen Ortsoperatoren.

Schließlich zeigt sich, daß die bekannten, zur inhomogenen Lorentz-Gruppe gehörigen Felder wegen ihrer Unsymmetrie in den Längendimensionen nur eine unvollständige Darstellung der konformen Gruppe bilden.

Einleitung

Wenige Jahre nach der Arbeit: „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" von A. Einstein[2]) stellten E. Cunningham[3]) und H. Bateman[4]) fest, daß

---

[1]) Münchener Dissertation 1962.
[2]) A. Einstein, Ann. Physik **17**, 891 (1905).
[3]) E. Cunningham, Proc. London Math. Soc. 8, 77 (1910).
[4]) H. Bateman, Proc. London Math. Soc. 8, 223 (1910).

die Maxwellschen Gleichungen nicht nur gegenüber Lorentz-Transformationen, sondern auch gegenüber der allgemeineren 15parametrigen konformen Gruppe von Raum und Zeit invariant sind. Das sind die Koordinatentransformationen, die das vierdimensionale Linienelement *ds* in ein Vielfaches von sich überführen. Da man nicht wußte, was diese Invarianz physikalisch bedeutete, erregte sie zunächst mehr das Interesse der Mathematiker als das der Physiker. F. Klein hat das oft beklagt[5]), und auf seine Anregung hin stellte E. Bessel-Hagen[6]) mit Hilfe der E. Noetherschen Sätze[7]) die zusätzlichen fünf Erhaltungsgrößen auf, die aus der Konform-Invarianz folgen.

Neue Anregungen kamen aus den Arbeiten von H. Weyl[8]), die eine Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie zu einer Theorie, die auch noch die Elektrodynamik mit umfassen sollte, zum Ziele hatten. Weyl ging davon aus, daß in einem Raume die Einheitsmaßstäbe an verschiedenen Punkten nicht gleich zu sein brauchen, sondern daß ein bestimmter metrischer Zusammenhang besteht, der die Veränderung der Einheitsmaßstäbe von Punkt zu Punkt bestimmt. Dieser Zusammenhang sollte beschrieben sein durch ein Vektorfeld, das Weyl mit den elektromagnetischen Potentialen identifizierte. Die Möglichkeit der Umeichung entsprach eine verallgemeinerte konforme Transformation des Linienelementes, die er mit der elektromagnetischen Eichgruppe und der Erhaltung der Ladung in Verbindung brachte.

Diese Ideen haben viele interessante mathematische Untersuchungen zur Folge gehabt[9–15]), aber die physikalische Interpretation hat sich nicht durchsetzen können; denn als die Quantenmechanik bald darauf zeigte, daß die Erhaltung der Ladung offenbar mit der Phasentransformation zusammenhing, resignierte Weyl schließlich und widerrief seine frühere Deutung[16]).

Die Weylschen Arbeiten hingen nicht unmittelbar mit der 15parametrigen konformen Gruppe zusammen. Diese spezielleren Transformationen rückten wieder mehr in das Gesichtsfeld durch Untersuchungen zur Konform-Invarianz des Maxwellschen Feldes und der Dirac-Gleichung von P. A. M. Dirac[17]), besonders aber im Anschluß an die sogenannte „New Relativity" von Page[18]), bei der in Verallgemeinerung der speziellen Relativitätstheorie auch gleichförmig beschleunigte Bewegungen zugelassen waren. In mehreren Ar-

---

[5]) F. Klein, Vorl. über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Bd. 2, Berlin 1927, S. 77ff.
[6]) E. Bessel-Hagen, Math. Ann. **84**, 258 (1921).
[7]) E. Noether, Nachr. d. Göttinger Akad. d. Wiss. 1918, S. 235.
[8]) H. Weyl, Ber. preuß. Akad. Wiss. **26**, 465 (1918) u. Raum—Zeit—Materie, Berlin 1923, Kap. II.
[9]) T. Y. Thomas, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **18**, 103 (1932).
[10]) D. Veblen, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **19**, 462, 503 (1933).
[11]) D. Veblen, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **21**, 484 (1935).
[12]) J. A. Schouten u. J. Haantjes, Math. Ann. **112**, 594 (1936).
[13]) J. A. Schouten u. J. Haantjes, Math. Ann. **113**, 568 (1937).
[14]) J. A. Schouten u. J. Haantjes, Proc. Ned. Akad. Wet. **39**, 1059 (1936).
[15]) H. J. Bhaba, Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 622 (1936).
[16]) H. Weyl, Naturwiss. **19**, 49 (1931).
[17]) P. A. M. Dirac, Ann. Math. **37**, 429 (1936).
[18]) L. Page, Physic. Rev. **49**, 254, 466 (1936).

beiten[19–21]), vor allem in denen von J. Haantjes[22])[23]) und E. L. Hill[24–26]), wurde der Zusammenhang von konformen Transformationen und gleichförmig beschleunigten Bezugssystemen untersucht.

Aber auch diese physikalische Interpretation hat sich nicht als sehr fruchtbar erwiesen, obschon sie die einzige ist, die heute in der Literatur noch eine gewisse Aktualität besitzt[27])[28]). Der Mangel liegt einmal darin, daß die gleichförmig beschleunigten Bewegungen in der Natur bei weitem nicht die Bedeutung haben, die denen konstanter Geschwindigkeit zukommt, zum anderen ist der mit der Beschleunigung eng verknüpfte Kraftbegriff in der relativistischen Mechanik zur Beschreibung der physikalischen Erscheinungen, vor allem bei Mehrkörperproblemen, anscheinend nicht mehr so geeignet wie in der klassischen Mechanik. Wir werden diese Deutung der konformen Gruppe daher durch eine andere und einfachere ersetzen.

Neues Interesse an der Konform-Invarianz entstand in den letzten zehn Jahren durch die Physik der Elementarteilchen: Als man beim Durchsehen der experimentellen Ergebnisse mehrere Erhaltungssätze fand, die über die bekannten, aus der Lorentz-Invarianz folgenden von Energie, Impuls usw. und den der Ladung hinausgingen, schien es notwendig, nach neuen Invarianzen zu suchen, da wegen der Noetherschen Sätze[7]) gruppentheoretische Symmetrien und Erhaltungsgrößen eng miteinander verknüpft sind. Bei dieser Suche war es naheliegend, auch die konforme Gruppe heranzuziehen.

Hier besteht jedoch eine alte Schwierigkeit: Die relativistischen Gleichungen für freie Felder von Klein, Gordon und Dirac sind nur dann konforminvariant, wenn man die Masse mittransformiert, und zwar reziprok zum Linienelement[14]). Dieses hat zur Folge, daß man mit den Noetherschen Methoden keine Erhaltungssätze bekommt, die man ja doch schließlich haben möchte.

Trotz dieses Mangels ist eine große Zahl von Arbeiten erschienen, die sich meistens mit der mathematischen Analyse, aber auch mit physikalischen Problemen befassen.

Schon ziemlich früh haben F. Bopp und F. L. Bauer auf die mögliche Bedeutung der konformen Gruppe für eine Theorie der Elementarteilchen hingewiesen und den engen Zusammenhang zwischen der Lie-Algebra dieser Gruppe, den Dirac-Matrizen und gewissen Modellen der Feldmechanik betont[29–31]). Y. Murai[32])[33]) untersuchte die unitären Darstellungen der zu den konformen Transformationen von Raum und Zeit isomorphen sechs-

---

[19]) H. T. Engstrom u. M. Zorn, Physic. Rev. **49**, 701 (1936).
[20]) H. P. Robertson, Physic. Rev. **49**, 755 (1936).
[21]) D. G. Bourgin, Physic. Rev. **50**, 864 (1936).
[22]) J. Haantjes, Proc. Ned. Akad. Wet. **43**, 1288 (1940).
[23]) J. Haantjes, Proc. Ned. Akad. Wet. **44**, 814 (1941).
[24]) E. L. Hill, Physic. Rev. **67**, 358 (1945).
[25]) E. L. Hill, Physic. Rev. **68**, 232 (1945).
[26]) E. L. Hill, Physic. Rev. **72**, 143 (1947).
[27]) Th. Fulton u. F. Rohrlich, Ann. Physik **9**, 499 (1960).
[28]) Vachaspati u. L. M. Bali, Nuovo Cimento **21**, 442 (1961).
[29]) F. Bopp u. F. L. Bauer, Z. Naturforschung **4a**, 611 (1949).
[30]) F. Bopp, Intern. Conf. Kyoto 1953, S. 289.
[31]) F. L. Bauer, Ber. Bayr. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1952, S. 111.
[32]) Y. Murai, Progr. Theor. Phys. **9**, 147 (1953).
[33]) Y. Murai, Progr. Theor. Phys. **11**, 441 (1954).

dimensionalen Drehungen in Analogie zu der Arbeit von V. Bargmann[34]) über die homogene Lorentz-Gruppe. Vor allem geometrische Betrachtungen, die sich zum Teil an die allgemeine Relativitätstheorie anlehnen, findet man bei R. L. Ingraham[35–37]), der auch eine von Murai[38]) angegebene Spinorgleichung analysiert hat[39]). Konforminvariante Gleichungen wurden ebenfalls untersucht von F. Gürsey[40]), J. A. McLennan[41])[42]) und S. A. Bludman[43]).

Eingang in die Quantenfeldtheorie hat die konforme Gruppe erst in letzter Zeit durch H. P. Dürr, W. Heisenberg und Mitarbeiter[44]) gefunden, die die Invarianz gegenüber Dilatationen betrachteten und auf den Zusammenhang mit der indefiniten Metrik hinwiesen. J. E. Wess hat daraufhin in zwei Arbeiten[45])[46]) die Bedeutung der konformen Transformationen für die freien Felder quantenfeldtheoretisch untersucht und ist zu negativen Ergebnissen gekommen, die aber zu einem großen Teil daher rühren, daß er einen Hilbert-Raum mit definiter Metrik voraussetzt, was, wie wir sehen werden, offenbar nicht möglich ist.

Bei der Vielfalt der Auffassungen über die Bedeutung der konformen Transformationen, erscheint es am vordringlichsten, eine einfache und konsistente physikalische Interpretation für sie zu finden. Dies wird in I unternommen. An Hand der mathematischen Formulierung des Messens mit Maßstäben wird gezeigt, daß man die Dilatationen und speziellen konformen Transformationen als ortsunabhängige und ortsabhängige Maßstabsumeichungen ansehen kann. Für die Dilatationen, die wir auch „Skalentransformationen" nennen wollen, ist diese Interpretation in der Literatur schon üblich[39])[44])[47]). Wir werden zeigen, daß sie sich auf die speziellen konformen Transformationen übertragen läßt. Die Forderung nach Invarianz der physikalischen Grundgleichungen gegenüber diesen beiden Koordinatentransformationen ist daher gleichbedeutend mit dem Prinzip, daß das beobachtete physikalische Geschehen unabhängig ist von den Längeneinheiten, mit denen man mißt. Da es bisher keine Gründe gibt, an diesem Prinzip zu zweifeln, sollte jede physikalische Theorie gegenüber Dilatationen und speziellen konformen Transformationen invariant sein!

Wir nehmen mit dieser Deutung einen Grundgedanken der Weylschen Überlegungen wieder auf, fassen ihn jedoch mathematisch anders!

Da es für die Charakterisierung von Punkten in Raum und Zeit mittels Koordinaten überflüssig ist, daß diese dimensionsbehaftet sind, werden wir am Schluß des Kapitels an Stelle der x^μ dimensionslose Koordinaten definieren.

---

34) V. Bargmann, Ann. Math. **48**, 568 (1947).
35) R. Ingraham, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **38**, 921 (1952).
36) R. Ingraham, Nuovo Cimento **9**, 886 (1952).
37) R. Ingraham, Nuovo Cimento **12**, 825 (1954).
38) Y. Murai, Nucl. Phys. **6**, 489 (1958).
39) R. Ingraham, Nuovo Cimento **16**, 104 (1960).
40) F. Gürsey, Nuovo Cimento **3**, 988 (1956).
41) J. A. McLennan, Nuovo Cimento **3**, 1360 (1956).
42) J. A. McLennan, Nuovo Cimento **5**, 640 (1957).
43) S. A. Bludman, Physic. Rev. **107**, 1163 (1957).
44) H. P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder u. K. Yamazaki, Z. Naturforschung **14a**, 441 (1959).
45) J. E. Wess, Nuovo Cimento **14**, 527 (1959).
46) J. E. Wess, Nuovo Cimento **18**, 1086 (1960).
47) B. Hoffmann, Physic. Rev. **89**, 49 (1953).

Diese führen unmittelbar zu den Drehungen in sechs Dimensionen. Es zeigt sich, daß man die neuen Koordinaten, die zunächst nur mathematische Hilfsgrößen zu sein scheinen, in anschaulicher Weise physikalisch interpretieren und rechtfertigen kann.

In II werden wir die konforme Gruppe darstellungstheoretisch analysieren und die Ergebnisse mit der Deutungshypothese von I vergleichen. Aus der Struktur der Lie-Algebra, besonders aus den Eigenschaften des die infinitesimalen Skalentransformationen erzeugenden Operators D, ergibt sich, daß offenbar physikalisch nur Darstellungen mit indefiniter Metrik in Frage kommen, während die unitären Darstellungen[32][33]) physikalisch uninteressant zu sein scheinen. Da die Skalentransformationen einem einfachen physikalischen Prinzip entspringen, hat man damit eine elementare Begründung für die Einführung einer indefiniten Metrik, die in der Physik wegen der Schwierigkeiten mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation bisher mit einer gewissen Skepsis betrachtet wurde. Wir werden auf das Deutungsproblem nicht eingehen, aber die Unvermeidbarkeit eines solchen Darstellungsraumes zeigen.

Für den Fall der Darstellungen endlicher Dimension stellt sich heraus, daß die Eigenwerte von D ganze oder halbganze Zahlen sind. Dies bedeutet, daß physikalische Größen nur ganze oder halbganze Längendimensionen haben können, und zwar Tensoren nur ganze, Spinoren nur halbganze!

Ein weiteres Ergebnis ist, daß bei den Darstellungen mit indefiniter Metrik die Eigenvektoren der Energie-Impuls-Operatoren kein vollständiges System bilden. Dieses und die indefinite Metrik betreffen zwei der Voraussetzungen der Lehmann-Källenschen Spektraldarstellung von Vakuumerwartungswerten wechselwirkender Felder[48][49]), bei der angenommen wird, daß das Energie-Impuls-Eigenvektorsystem vollständig und die Metrik definit ist. Da mit dieser Darstellung eng die Divergenzen der Quantenfeldtheorie verknüpft sind, ist es vielleicht möglich, mit Hilfe der konformen Gruppe zu einer konvergenten Feldtheorie zu kommen, ähnlich wie das beim Lee-Modell[50]) durch die indefinite Metrik erreicht wird[51]).

Als nächstes werden wir die endlichdimensionalen Darstellungen der konformen Gruppe nach der E. Cartanschen Methode der höchsten Gewichte[52]) klassifizieren und besonders die beiden Spindarstellungen untersuchen, aus denen sich die übrigen Darstellungen konstruieren lassen. Hier nutzen wir aus, daß die Algebra der Dirac-Matrizen isomorph ist zu der Lieschen Algebra der konformen Gruppe. Der Dilatationsoperator D wird dabei durch $\frac{1}{2}\,i\,\gamma_5$ dargestellt. Nun beschreiben die Eigenwerte von γ_5 den Schraubungssinn der Neutrinen und Antineutrinen, die sogenannte „Chirality"[53]), und bei schwachen Wechselwirkungen die extrem-relativistische Helizität — das ist die Projektion des Spinvektors auf die Impulsrichtung — der Fermionen mit Masse. Damit hat man einerseits eine physikalische Deutung der Eigenwerte von D gewonnen, andererseits die Helizität, die in den letzten Jahren im Zusammenhang mit der Paritätsverletzung eine so große Bedeutung bekommen hat, auf ein

[48]) G. Källen, Helv. phys. Acta **25**, 417 (1952).
[49]) H. Lehmann, Nuovo Cimento **11**, 342 (1954).
[50]) T. D. Lee, Physic. Rev. **95**, 1329 (1954).
[51]) G. Källen u. W. Pauli, Dan. Mat. Fys. Medd. **30**, No. 7 (1955).
[52]) E. Cartan, Bull. Soc. Math. France **41**, 53 (1913).
[53]) S. Watanabe, Physic. Rev. **106**, 1306 (1957).

elementares physikalisches Prinzip zurückgeführt. Die Überlegungen lassen sich ohne Widerspruch auf das elektromagnetische Feld übertragen.

Ferner sieht man, daß die räumlichen Spiegelungen aus dem vierdimensionalen Diracschen Spinraum herausführen und die Paritätsverletzung somit nicht an die Zwei-Komponenten-Theorie gebunden ist. Außerdem ergibt sich eine einfache Begründung für die sogenannte V-A-Kopplung, mit der man in letzter Zeit so erfolgreich die schwachen Wechselwirkungen beschrieben hat[54][55].

Im weiteren sind die Darstellungen der Lie-Algebra im Raum der Funktionen der x^μ und der homogenen Koordinaten untersucht und die Eigenfunktionen zu den Differentialoperatoren der Dilatationen und speziellen konformen Transformationen angegeben.

Beim skalaren Feld haben die von der Feldvariation herrührenden Anteile der Operatoren der speziellen konformen Gruppe als Eigenwerte die Koordinaten x^μ, multipliziert mit $2i$. Man erhält also durch diese Gruppe Ortsoperatoren.

Schließlich wird gezeigt, daß die vier elektromagnetischen Potentiale mathematisch ein unvollständiges System bilden, das aber durch zwei weitere Komponenten vervollständigt werden kann. An diesem Beispiel wird gleichzeitig erläutert, wie man physikalische Größen und Gleichungen so umschreiben kann, daß ihre Konform-Invarianz unmittelbar in Erscheinung tritt. Das dabei erhaltene System der Maxwellschen Gleichungen ist identisch mit dem von Dirac[17]) auf etwas anderem Wege schon früher abgeleiteten.

Der Anhang enthält die wichtigsten Definitionen und Sätze über Vektorräume mit indefiniter Metrik, die in II benutzt werden.

I. Zur physikalischen Deutung

1. Die Transformationen der Koordinaten x^μ

Eine „Länge“ oder „Entfernung“ E in Raum und Zeit setzt sich zusammen aus einem räumlichen Anteil E_r und einem zeitlichen E_t. Dabei ist E_r charakterisiert durch zwei physikalisch vorgegebene Raumpunkte P_r und Q_r, z. B. den beiden Spitzen eines Reißzirkels, und deren „kürzeste Verbindungslinie“, die wir uns durch den Weg eines Photons von P_r nach Q_r definiert denken. Entsprechend ist E_t bestimmt durch zwei Zeitpunkte P_t und Q_t, z. B. durch zwei aufeinanderfolgende Nulldurchgänge eines Pendels. Eine Raum-Zeit-Länge E ist dann z. B. durch die beiden Knicke in der Spur eines π-μ-e-Zerfalles und die Lebensdauer des μ-Mesons gegeben.

Diese Definition von Länge ist zunächst ohne Bezug auf irgendwelche Einheiten, die erst durch den Meßprozeß hereinkommen. Er besteht darin, daß wir eine räumliche Länge e_r auszeichnen, sie zum „Maßstab“ erklären und E_r mit ihr vergleichen, d. h. nachsehen, wie oft e_r, längs der kürzesten Verbindungslinie abgetragen, in E_r enthalten ist. Ist diese „Maßzahl“ dr, so sagen wir, daß E_r die Länge dr habe, gemessen in der Einheit e_r. Bei festem E_r ist dr eine Funktion des Maßstabes e_r. Ersetzt man diesen durch einen davon verschiedenen, so ändert auch dr seinen Wert.

---

[54]) R. E. Marshak u. E. C. G. Sudarshan, Physic. Rev. **109**, 1860 (1957).
[55]) R. P. Feynman u. M. Gell-Mann, Physic. Rev. **109**, 193 (1957).

Entsprechend zeichnen wir ein bestimmtes Zeitintervall e_t aus, nennen das dieses Intervall periodisch reproduzierende Gebilde ,,Uhr'', und vergleichen andere Zeitintervalle damit. Im Prinzip kann man e_t wohl unabhängig von e_r wählen, da wir jedoch spezielle Relativitätstheorie treiben wollen, eichen wir unsere Uhr e_0 in Einheiten e_r, indem wir den Weg, den das Licht in der zu messenden Zeit E_t zurücklegt, mittels e_r messen. Die zugehörige Maßzahl sei dx^0.

Im folgenden werden wir beliebige vorgegebene Längen mit E_r, E_t oder E bezeichnen, Maßstäbe und Uhren mit den entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben e_r, e_0 und e. Prinzipiell kann zwar jede Länge als Maßstab dienen, der Begriff ,,Maßstab'' beinhaltet jedoch mehr als der Begriff ,,Länge'', nämlich die Forderung oder Übereinkunft, beliebige vorgegebene Längen mit einer bestimmten, z. B. dem Urmeter in Paris, zu vergleichen. Daß diese Forderung realisierbar ist, macht Messen, und damit Physik, überhaupt erst möglich!

Bei der mathematischen Formulierung dieser Überlegungen nehmen wir an, daß die ,,Summe'' von zwei Maßstäben, $\overset{1}{e}_r + \overset{2}{e}_r$, worunter man sich anschaulich die Diagonale des von $\overset{1}{e}_r$ und $\overset{2}{e}_r$ aufgespannten Parallelogramms vorstellen möge, wieder einen Maßstab bildet, daß diese Summenbildung kommutativ und assoziativ ist, daß es einen ,,Nullmaßstab'' o gibt, der durch $e_r + 0 = e_r$ definiert ist, und schließlich, daß es zu jedem Maßstab e_r genau einen zweiten $-e_r$ gibt, für den $e_r + (-e_r) = 0$ gilt. Diese Annahmen bedeuten, daß die Maßstäbe eine additive abelsche Gruppe bilden.

Weiter sollen die e_r die ,,Multiplikation'' mit den reellen Zahlen dr, den Maßzahlen, gestatten. Dabei gelten folgende Rechenregeln:

$$dr\,(\overset{1}{e}_r + \overset{2}{e}_r) = dr\,\overset{1}{e}_r + dr\,\overset{2}{e}_r, \quad 1\,e_r = e_r,$$
$$(\overset{1}{dr} + \overset{2}{dr})\,e_r = \overset{1}{dr}\,e_r + \overset{2}{dr}\,e_r, \quad (\overset{1}{dr}\,\overset{2}{dr})\,e_r = \overset{1}{dr}\,(\overset{2}{dr}\,e_r).$$

Der Vorteil, die Maßzahlen mathematisch als Differentiale aufzufassen, wird sich bald herausstellen.

Aus Erfahrung wissen wir, daß man mittels der Maßzahlen jede Länge E_r aus drei Grundmaßstäben e_1, e_2, e_3 linear kombinieren kann:

$$E_r = dr\,e = dx^i\,e_i.$$

(Summationskonvention: über gleichlautende, oben und unten vorkommende Indizes wird summiert; lateinische Indizes laufen von 1 bis 3, griechische von 0 bis 3).

Nehmen wir nun noch die Zeit E_t hinzu, so bekommen wir:

$$E = E_t + E_r = ds\,e = dx^\mu\,e_\mu. \tag{1}$$

Dabei müssen wir noch den Zusammenhang zwischen der Maßzahl ds von E und ihren Komponenten dx^μ angeben. Wir setzen:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(d\tau)^2} \\ d\tau^2 &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= dx_\mu\,dx^\mu, \qquad \text{falls} \quad d\tau^2 > 0 \end{aligned} \tag{2a}$$

und nennen E dann zeitartig;

$$ds = \sqrt{-(d\tau)^2}\,, \qquad \text{falls} \quad d\tau^2 < 0\,. \tag{2b}$$

In diesem Fall heißt E raumartig.

Für

$$d\tau^2 = 0 \text{ sei auch } ds = 0\,. \tag{2c}$$

In (2a) ist dx_μ definiert durch

$$dx_\mu = g_{\mu\nu}\, dx^\nu\,,$$

mit $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, alle übrigen $g_{\mu\nu} = 0$.

Da sich die Größen $g_{\mu\nu}$ später nicht mehr bei allen Transformationsgruppen wie die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe transformieren sollen, nennen wir das System $(g_{\mu\nu})$ nicht „metrischen Tensor" sondern „metrischen Operator", oder kürzer: „Metrik".

Wir wollen nun zusätzlich zu den Differentialen dx^μ den Zahlen x^μ selbst einen physikalischen Sinn geben. Dazu denken wir uns jedem Raum-Zeit-Punkt P genau ein Zahlenquadrupel $(y) = (y^0, y^1, y^2, y^3)$ zugeordnet. Die Art dieser Zuordnung ist an sich völlig beliebig und kann ohne jeden Zusammenhang mit den dx^μ geschehen, man hat lediglich darauf zu achten, daß jedem Raum-Zeit-Punkt eineindeutig ein Quadrupel (y) entspricht. Um aber auf dem Boden der speziellen Relativitätstheorie zu bleiben, wählen wir diesen Zusammenhang so: Es seien $\overset{0}{e}_\mu$ die Maßstäbe im Punkte $O = (\overset{0}{x}{}^\mu)$ — wir nennen die y^μ in unserem Spezialfall jetzt x^μ — und $\overset{0}{dx}{}^\mu$ die Maßzahlen der Länge OP, wobei P ein zu O „infinitesimal" benachbarter Punkt ist. Hierbei ist zu bemerken, daß „infinitesimal" innerhalb des mathematischen Formalismus der Differentiale gemeint ist. Physikalisch kann der Punkt P von O durchaus eine endliche Entfernung haben.

Für die Koordinaten von P setzen wir nun:

$$x^\mu = \overset{0}{x}{}^\mu + \overset{0}{dx}{}^\mu\,, \quad \mu = 0, 1, 2, 3\,. \tag{3}$$

Für später ist wichtig, daß durch (3) die Koordinaten x^μ zu maßstabsabhängigen Zahlen werden, da, wie erwähnt, bei festem OP die $\overset{0}{dx}{}^\mu$ von der Wahl der $\overset{0}{e}_\mu$ abhängen. Diese Eigenschaft der Koordinaten ist offenbar unnötig, da man Punkte in Raum und Zeit ja auch durch unbenannte Zahlen charakterisieren kann.

Darüber hinaus gilt in der speziellen Relativitätstheorie noch folgende weitere Vereinfachung: Es wird angenommen, daß die Maßstäbe, die sich an verschiedenen Punkten befinden, alle die gleiche Länge haben, d. h. bringt man einen Maßstab $\overset{1}{e}$ vom Punkte P_1 auf beliebigem Wege an den Punkt P_2, so soll er, gemessen mittels $\overset{2}{e}$ von P_2 die Maßzahl 1 haben. Das gleiche soll gelten, wenn man $\overset{2}{e}$ von P_2 nach P_1 bringt. Ferner: Wenn diese Relation zwischen $\overset{1}{e}$ und $\overset{2}{e}$ sowie zwischen $\overset{2}{e}$ und $\overset{3}{e}$ besteht, so soll sie auch zwischen $\overset{1}{e}$ und $\overset{3}{e}$ bestehen, wobei $\overset{3}{e}$ zu einem dritten Punkt gehört.

Indem nun die spezielle Relativitätstheorie diese Maßstäbe ein für allemal festhält, lassen sich die physikalischen Aussagen mittels der Koordinaten x^μ

allein formulieren. Das ist inzwischen so zur Gewohnheit geworden, daß dabei die Voraussetzungen nicht mehr deutlich in Erscheinung treten. Dadurch, daß wir diese berücksichtigen, wird sich eine einfache physikalische Deutung der konformen Transformationen ergeben. Bevor wir darauf eingehen, wollen wir kurz die Aussagen der speziellen Relativitätstheorie formulieren.

Da es keine physikalisch ausgezeichneten Punkte in Raum und Zeit gibt, können wir in (3) $\overset{0}{x}{}^\mu$ durch $\overset{0}{x}{}^\mu + a^\mu$, a^μ konstant, ersetzen, ohne daß sich an der Physik etwas ändert. Wegen $d(\overset{0}{x}{}^\mu + a^\mu) = d\overset{0}{x}{}^\mu$ geht x^μ in $x^\mu + a^\mu$ über. Das ist unsere erste Invarianzgruppe, die Translationen:

$$T_4: \quad x^{\mu\prime} = x^\mu + a^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{I}$$

Der Index „4" soll die Anzahl der unabhängigen Parameter kennzeichnen!

Da es weiter wegen (1) für die Charakterisierung der Länge E bei festem e nur auf die Maßzahl ds ankommt, können wir die e_μ durch vier andere, ebenfalls ortsunabhängige e'_μ ersetzen, wenn nur $ds' = ds$. Dabei ist wesentlich, daß ds' nach der gleichen Vorschrift wie ds aus seinen Komponenten $dx^{\mu\prime}$ berechnet wird:

$$ds^2 = ds'^2 = \pm\, dx^{\mu\prime}\, dx'_\mu.$$

Aus der Transformation der e_μ:

$$e_\mu = l^{\nu}_{\cdot\mu}\, e'_\nu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{4}$$

wobei die $l^{\nu}_{\cdot\mu}$ ortsunabhängig sind, sowie

$$dx^{\mu\prime}\, e'_\mu = dx^\mu\, e_\mu \qquad \text{und} \qquad dx^{\mu\prime}\, dx'_\mu = dx^\mu\, dx_\mu$$

folgen

$$dx^{\mu\prime} = l^{\mu}_{\cdot\nu}\, dx^\nu$$

und

$$l^{\varkappa}_{\cdot\lambda}\, l_\mu^{\cdot\lambda} = \delta^\varkappa_\mu = \begin{cases} 1, & \varkappa = \mu \\ 0, & \varkappa \neq \mu \end{cases}.$$

Da wir zunächst nur solche Transformationen betrachten, die sich durch stetige Änderung der Parameter in die Identität überführen lassen, verlangen wir noch $\det(l) = 1$, $l^{0}_{\cdot 0} > 0$. Wegen (3) und der Konstanz der Koeffizienten in (4) erhalten wir unmittelbar die homogenen Lorentz-Transformationen der x^μ:

$$L_6^{\dagger}: \quad x^{\mu\prime} = l^{\mu}_{\cdot\nu}\, x^\nu, \quad l^{\varkappa}_{\cdot\lambda}\, l_\mu^{\cdot\lambda} = \delta^\varkappa_\mu, \quad \det(l) = 1, \quad l^{0}_{\cdot 0} > 0. \tag{II}$$

Damit sind im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie alle kontinuierlichen Koordinatentransformationen gegeben, solange wir die Längeneinheiten festhalten. Tun wir das nicht, und es besteht prinzipiell kein Grund, bestimmte Maßstäbe auszuzeichnen, so ist die einfachste Transformation, die neuen Maßstäbe als ein Vielfaches der alten zu wählen:

$$e = \varrho\, e', \quad e_\mu = \varrho\, e'_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{5}$$

mit ortsunabhängigem $\varrho > 0$. Da sich an der physikalisch vorgegebenen Länge E dabei nichts ändert, gilt:

$$E = ds\, e = dx^\mu\, e_\mu = ds'\, e' = dx^{\mu\prime}\, e'_\mu.$$

Daraus folgt:

$$ds' = \varrho\, ds, \quad dx^{\mu\prime} = \varrho\, dx^\mu,$$

bzw. wie oben

$$D_1: \quad x^{\mu\prime} = \varrho\, x^\mu, \quad \varrho > 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{III}$$

Dies sind die sogenannten „Dilatationen". Der Name ist etwas irreführend, da hier, im Gegensatz etwa zur Zeitdilatation in der speziellen Relativitätstheorie, keine physikalische Dehnung der Maßstäbe gemeint ist, sondern lediglich ihre Umeichung: Konkretisiert bedeutet die Gleichung $ds\, e = ds'\, e'$ etwa: 5 m = 500 cm, mit $\varrho = 100$! Es ist daher zweckmäßiger, an Stelle von „Dilatationen" für (III) „Skalentransformationen" zu sagen. Da jedoch der Name „Dilatationen" im Zusammenhang mit der mathematischen Form des Transformationsgesetzes (III) sehr verbreitet ist, werden wir ihn weiterhin mitbenutzen. Man hat sich dabei immer die obige physikalische Interpretation vor Augen zu halten.

Transformationen, die wie die Skalentransformationen die Einheiten ändern, wollen wir allgemein als „Eichtransformationen" bezeichnen und sie unterscheiden von den „maßstabsfesten", die die Einheiten festlassen. Zu den letzteren gehören die Gruppen I und II.

Der Begriff der „Eichtransformation" stammt von H. Weyl[8]). Es sei schon hier auf den Unterschied zu seiner mathematischen Formulierung der Eichungen hingewiesen: Diese geschehen bei Weyl dadurch, daß er den metrischen Operator $(g_{\mu\nu})$ mit geeigneten Funktionen $f^2(x)$ multipliziert, die Koordinaten aber festhält. Bei uns ist es gerade umgekehrt: Wir halten bei den Skalentransformationen und den noch zu diskutierenden speziellen konformen Transformationen die $g_{\mu\nu}$ fest und erzeugen die Eichungen durch Koordinatentransformationen. Die daraus entstehenden wesentlichen Einschränkungen für die Funktionen f werden wir weiter unten ausführlich erörtern.

Im Anschluß an (III) wollen wir noch den Begriff der „Dimension" definieren. Zunächst nehmen wir an, daß sich alle vorkommenden physikalischen Größen A nach einer Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe (II) transformieren. Der Einfachheit halber sprechen wir hier nur von Tensoren. Die Aussagen übertragen sich analog auf Spinoren.

Die Tensoren A bilden ein System reeller Zahlen, die den Maßzahlen dx^μ entsprechen. Bei einer Skalentransformation D_1 multiplizieren sich die A mit einem Faktor ϱ^m:

$$A \to \varrho^m A\,.$$

Die Tensoren A bilden also eine Darstellung der Skalentransformationen.

Wir werden später zeigen, daß zu Tensoren immer ganze m, zu Spinoren immer halbganze m gehören; halbganze Zahl bedeutet: ganze Zahl + 1/2.

Wir nennen m die „Längendimension" von A, abgekürzt (L^m). Diese Definition der Dimension hat den Vorteil, daß man präzise mathematische Aussagen über sie machen kann, sie ist allerdings unanschaulicher als die konventionelle: So gehören E und e beide zur Größenart „Länge", aber E ist „dimensionslos" und e hat die Dimension (L^{-1})! Es wäre natürlicher, e die Dimension einer Länge zuzuschreiben, dann hätten jedoch die Maßzahlen dx^μ die Dimension (L^{-1}); durch unsere obige Festsetzung behalten die Tensoren A ihre konventionellen Längendimensionen!

Schließlich ist es keineswegs notwendig, daß die Einheitsmaßstäbe an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten alle gleich lang sind: Man kann in München in Metern, in Hamburg in Ellen, heute in Minuten und morgen in Sekunden messen usw., ohne daß dies an der Physik etwas ändert. Man muß nur wissen, wie man die an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten gewonnenen Meßergebnisse gleichartiger physikalischer Prozesse ineinander umzurechnen hat. Dies bedeutet, daß die neuen Einheitsmaßstäbe aus den alten durch Multiplikation mit einem ortsabhängigen Faktor $\sigma(x)$ hervorgehen:

$$e' = \sigma(x)\, e .$$

Hieraus und aus $E = ds\, e = ds'\, e'$ folgt:

$$ds' = \sigma^{-1}(x)\, ds .$$

Zunächst ist die Funktion $\sigma(x)$ beliebig. Sie läßt sich jedoch aus der Forderung bestimmen, daß sie mittels Koordinatentransformationen erzeugt werden soll. Das ist eine plausible Integrabilitätsbedingung, da wir wie bisher an einem engen Zusammenhang zwischen Maßzahlen und Koordinaten festhalten wollen. Allerdings wird dieser nicht mehr ganz so einfach wie in (3) sein können. Die Forderung nach Integrabilität ist ein wesentlicher Unterschied zu der Weylschen Auffassung und wird weitreichende Konsequenzen haben.

Setzen wir

$$ds'^2 = \pm\, dx^{\mu\prime}\, dx'_\mu ,$$

so folgt aus den obigen Formeln:

$$dx^{\mu\prime}\, dx'_\mu = \sigma^{-2}(x)\, dx^\mu\, dx_\mu . \tag{6}$$

Die $g_{\mu\nu}$ halten wir hierbei fest! Macht man den Ansatz:

$$x^{\mu\prime} = f^\mu(x) ,$$

so folgt aus (6):

$$\partial_\lambda f^\mu\, \partial^\nu f_\mu = \sigma^{-2}(x)\, \delta^\nu_\lambda, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} . \tag{7a}$$

bzw.:

$$\partial^\mu f_\lambda\, \partial_\mu f^\nu = \sigma^{-2}(x)\, \delta^\nu_\lambda; \quad \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3. \tag{7b}$$

Man rechnet leicht nach, daß die obigen Transformationen eine Gruppe bilden: Gehört[56])

$$\sigma_g(x) \text{ zu } x^{\mu\prime} = g^\mu(x) \quad \text{und} \quad \sigma_f(x') = \sigma_f[g(x)] \text{ zu } x^{\mu\prime\prime} = f^\mu(x') ,$$

so gehört

$$\sigma_{fg}(x) = \sigma_f[g(x)] \cdot \sigma_g(x) \text{ zu } x^{\mu\prime\prime} = f^\mu[g(x)] = h^\mu(x) . \tag{8}$$

Wir haben nun die $f^\mu(x)$ und $\sigma(x)$ mit Hilfe der Differentialgleichungssysteme (7a) oder (7b) zu bestimmen. Diese Systeme sind nach S. Lie[57]) einfach zu lösen, wenn wir zunächst nach den Transformationen fragen, die eine mit der Einheit kontinuierlich verbundene Gruppe bilden. Wir können uns dann auf infinitesimale Werte der Parameter beschränken. Setzen wir

$$x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu , \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

und berücksichtigen wir nur die in δx^μ linearen Glieder, so bekommen wir an Stelle von (7a) die Differentialgleichungen:

$$\partial_\mu(\delta x^\nu) + \partial^\nu(\delta x_\mu) = (\sigma^{-2}(x) - 1)\, \delta^\nu_\mu; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{9}$$

---

[56]) Herrn H. Pfister danke ich für Diskussionen zu den folgenden Überlegungen.
[57]) S. Lie u. F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig 1893, Bd. 3, S. 314ff.

Da die δx^μ sich wie Vierervektoren transformieren und außerdem in den möglichen Parametern linear sein müssen, machen wir für sie den Ansatz:

$$\delta x^\mu = b^\mu{}_{\varkappa\lambda}\, x^\varkappa\, x^\lambda + \text{höhere Potenzen von } x.$$

Die Terme, die zu den Transformationen I—III gehören, sind fortgelassen Setzt man diese infinitesimalen Transformationen in (9) ein und beachtet man, daß sie mit den Gruppen I—III zusammen wieder eine Gruppe bilden, so erhält man nach Lie[57]:

$$\delta x^\mu = 2x^\mu(\alpha \cdot x) - \alpha^\mu\, x^2, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{10}$$

Hieraus und aus (9) berechnet man:

$$\sigma(x) = 1 - 2\alpha\, x. \tag{11}$$

Als endliche Transformationen erhalten wir schließlich:

$$\left.\begin{aligned} C_4^+:\quad x^{\mu\prime} &= \sigma^{-1}(x)\,(x^\mu - c^\mu\, x^2)\\ \sigma(x) &= 1 - 2c\cdot x + c^2\, x^2. \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

Das sind die speziellen konformen Transformationen. Man bestätigt leicht, daß die Relation (6) durch (10) tatsächlich erfüllt wird.

Die Beziehung (6) ist noch in folgender Hinsicht von Bedeutung: Für die Physik ist der Unterschied von raumartigen und zeitartigen Entfernungen wesentlich, da nach der speziellen Relativitätstheorie raumartig zueinander liegende Ereignisse nicht ursächlich verknüpft sein können. Wegen des Faktors $\sigma^{-2}(x)$ in (6) sind Raumartigkeit und Zeitartigkeit auch bei konformen Transformationen invariante Eigenschaften, wenn man wie wir Entfernungen mittels der Differentiale dx^μ beschreibt. Hätten wir diese Begriffe an die Koordinaten x^μ gebunden, so wären wir in Schwierigkeiten gekommen, da

$$x'^2 = \sigma^{-1}(x)\, x^2$$

und $\sigma(x)$ auch negativ sein kann.

Für die physikalische Interpretation der Gruppen III und IV ist notwendig, daß sie kommutativ sind; denn erfahrungsgemäß ist das Ergebnis zweier Maßstabsumeichungen von der Reihenfolge unabhängig! Bei den Dilatationen ist die Kommutativität unmittelbar zu sehen! Bei den Transformationen IV zeigt man sie so: Mit Hilfe der Transformation durch reziproke Radien

$$R:\quad x^{\mu\prime} = -\frac{x^\mu}{x^2}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{12}$$

kann man ein Element C der Gruppe C_4^+ folgendermaßen darstellen:

$$C = RT(c)\, R. \tag{13}$$

Hierbei bedeutet T eine Translation. Wegen $RR = 1$ ist die Behauptung klar, da die Translationen kommutativ sind. Ebenfalls aus (13) sieht man sofort, daß die Transformationen IV eine Gruppe bilden.

Weiter bilden D_1 und C_4^+ zusammen wieder eine Gruppe, die in folgendem Sinne „kommutativ" ist: Da auch die durch die Gruppen I, II oder IV transformierten dx^μ sich bei D_1 wie die ursprünglichen verhalten sollen, entnimmt man aus (6), daß $\sigma(x)$ dimensionslos sein muß, die c^μ also die Dimension (L^{-1}) haben. Wegen dieser Invarianz von σ bei Dilatationen kommt es daher für die Wirkung auf ds nicht auf die Reihenfolge zweier Transformationen C und D an. Wir erhalten in beiden Fällen:

$$ds \to \varrho\, \sigma^{-1}\, ds .$$

Aus den gleichen Gründen erkennt man übrigens, daß $\sigma(x)$ bei homogenen Lorentz-Transformationen eine Invariante ist, die c^μ sich also wie Vierervektoren transformieren.

Da die c^μ voneinander unabhängig sind, können wir $c^2 \neq o$ annehmen und

$$\sigma(x) = c^2 \left(x^\mu - \frac{c^\mu}{c^2}\right)\left(x_\mu - \frac{c_\mu}{c^2}\right)$$

schreiben. Liegt daher der Punkt P auf dem Lichtkegel

$$L(c) = \left(x^\mu - \frac{c^\mu}{c^2}\right)\left(x_\mu - \frac{c_\mu}{c^2}\right) = 0,$$

so haben alle Längen, die mit den Maßstäben von P gemessen werden, die Maßzahl Unendlich. Anschaulich bedeutet dies, daß die neuen, durch die c^μ charakterisierten Maßstäbe, gegenüber den früheren so verschwindend klein sind, daß die neuen Maßzahlen über alle Grenzen wachsen.

Die Transformationen I—IV bilden zusammen die eigentliche konforme Gruppe C_{15}^{+}.

Zum Abschluß seien noch kurz die Spiegelungen erwähnt, da wir sie später brauchen werden.

Die räumlichen Spiegelungen P erhalten wir, indem wir das Maßstabskreuz (e_1, e_2, e_3) durch sein inverses ersetzen:

$$P: \quad e_0' = e_0, \quad e_i' = -e_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Da sich an der vorgegebenen Länge E dabei nichts ändert, gilt für die Maßzahlen:

$$dx^{0\prime} = dx^0, \quad dx^{i\prime} = -dx^i,$$

bzw. für die Koordinaten selbst:

$$P: \quad x^{0\prime} = x^0, \quad x^{i\prime} = -x^i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Die Zeitspiegelung T bedeutet, daß wir die Uhr e_0 im selben Rhythmus wie vorher rückwärts laufen lassen:

$$T: \quad e_0' = -e_0, \quad e_i' = e_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Wie oben folgt:

$$dx^{0\prime} = -dx^0, \quad dx^{i\prime} = dx^i;$$

$$T: \quad x^{0\prime} = -x^0, \quad x^{i\prime} = x^i.$$

2. Die Transformationen der Koordinaten η^μ, $\varkappa$, λ

Wir haben schon erwähnt, daß die Eigenschaft der Koordinaten x^μ, dimensionsbehaftet zu sein, überflüssig ist, da man Punkte, im Gegensatz zu Längen, auch durch unbenannte Zahlen charakterisieren kann. Indem wir in geeigneter Weise zu dimensionslosen Koordinaten übergehen, erreichen wir gleichzeitig, daß die Transformationen IV linear werden. Zu diesem Zwecke denken wir uns den Maßstab e in (1) dargestellt durch eine reelle Zahl $\varkappa$, die sich bei den Gruppen I bis IV wie e transformiert, d. h. bei Translationen und homogenen Lorentz-Transformationen invariant ist und bei Skalentransformationen und speziellen konformen Transformationen sich so transformiert:

$$\varkappa' = \varrho^{-1}\,\varkappa; \quad \varkappa' = \sigma(x)\,\varkappa. \tag{17}$$

Das so definierte $\varkappa$ entspricht dem Heisenbergschen l^{-1} [44])[58]). Jedoch haben wir vorerst keine dynamische Theorie, aus der wir einen Zahlenwert für $\varkappa$ berechnen könnten. $\varkappa$ als elementare Länge einzuführen, wäre daher verfrüht.

Als neue Koordinaten definieren wir nun:

$$\eta^\mu = \varkappa\, x^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{18}$$

Sie sind offenbar dimensionslos. Aus (18) folgt für die Differentiale:

$$dx^\mu = \frac{1}{\varkappa}\, d\eta^\mu - \frac{\eta^\mu}{\varkappa^2}\, d\varkappa. \tag{19}$$

Setzen wir sowohl für die x^μ wie für die η^μ ein durch (3) definiertes Lorentz-System voraus, d. h. sind P_1 und P_2 zwei infinitesimal benachbarte Punkte mit den Koordinaten $\overset{1}{x}{}^\mu$ bzw. $\overset{1}{\eta}{}^\mu$ und $\overset{2}{x}{}^\mu$ bzw. $\overset{2}{\eta}{}^\mu$, so ist $dx^\mu = \overset{2}{x}{}^\mu - \overset{1}{x}{}^\mu$, $d\eta^\mu = \overset{2}{\eta}{}^\mu - \overset{1}{\eta}{}^\mu$. Zusammen mit (18) und (19) folgt hieraus $d\varkappa = 0$. Dieser Wert für $d\varkappa$ ist translations-, lorentz- und dilatationsinvariant, aber nicht konforminvariant. Die Eichung $d\varkappa = 0$ beinhaltet daher offenbar gleiche Längeneinheiten an allen Punkten, während $d\varkappa \neq 0$ orstabhängige Einheiten bedeutet. Für $d\varkappa = 0$ kann man den zahlenmäßigen Zusammenhang zwischen dx^μ, $d\eta^\mu$ und $\varkappa$ in zweierlei Weise bestimmen: Entweder man gibt $\varkappa$ zugleich mit der Wahl von e einen bestimmten Zahlenwert, mißt dx^μ und rechnet daraus die Differentiale $d\eta^\mu$ aus. Oder man setzt $d\eta^\mu = \overset{2}{\eta}{}^\mu - \overset{1}{\eta}{}^\mu$, mißt dx^μ und bestimmt aus beiden $\varkappa$.

Es erweist sich als zweckmäßig, außer $\varkappa$ noch die überzählige Koordinate

$$\lambda = \varkappa\, x^2 \tag{20}$$

einzuführen. Zwischen den Koordinaten $\eta^\mu, \varkappa, \lambda$ besteht dann die Bindung:

$$\eta^\mu\,\eta_\mu - \varkappa\,\lambda = 0. \tag{21}$$

Mit Hilfe von (17) erhalten wir an Stelle der Transformationen I—IV:

$$\begin{aligned}
T_4:\quad & \eta^{\mu\prime} = \eta^\mu + a^\mu\,\varkappa, \quad \mu = 1, 2, 3, 0, \\
& \varkappa' = \varkappa \\
& \lambda' = 2 a_\nu\,\eta^\nu + a^2\,\varkappa + \lambda
\end{aligned} \tag{Ia}$$

$$\begin{aligned}
L_6^+:\quad & \eta^{\mu\prime} = l^\mu_{\cdot\nu}\,\eta^\nu \\
& \varkappa' = \varkappa \qquad l^\varkappa_{\cdot\lambda}\, l_\mu^{\cdot\lambda} = \delta^\varkappa_\mu, \\
& \lambda' = \lambda \qquad \det(l) = 1, \quad l^0_{\cdot 0} > 0,
\end{aligned} \tag{IIa}$$

$$\begin{aligned}
D_1:\quad & \eta^{\mu\prime} = \eta^\mu \\
& \varkappa' = \varrho^{-1}\,\varkappa \\
& \lambda' = \varrho\,\lambda
\end{aligned} \tag{IIIa}$$

$$\begin{aligned}
C_4^+:\quad & \eta^{\mu\prime} = \eta^\mu - c^\mu\,\lambda \\
& \varkappa' = -\,2 c_\nu\,\eta^\nu + \varkappa + c^2\,\lambda \\
& \lambda' = \lambda.
\end{aligned} \tag{IVa}$$

[58]) H. P. Dürr u. W. Heisenberg, Z. Naturforschung **16**a, 726 (1961).

Da die Koordinaten der Bindung (21) unterliegen, ist es zweckmäßig, zu den Differentialen $d\eta^\mu$, $d\varkappa$, $d\lambda$ überzugehen. Man rechnet leicht nach, daß die quadratische Form

$$d\varepsilon^2 = d\eta_\nu\, d\eta^\nu - d\varkappa\, d\lambda \tag{22}$$

bei den Transformationen Ia—IVa eine Invariante ist. Das ist der bekannte Satz, daß die konforme Gruppe von Raum und Zeit isomorph ist den Drehungen in sechs Dimensionen[5]).

Man erhält die übliche quadratische Normalform, wenn man $\varkappa = \eta^4 - \eta^5$, $\lambda = \eta^4 + \eta^5$ setzt. Wir werden jedoch $\varkappa$ und λ beibehalten, da sie eine unmittelbare physikalische Bedeutung haben.

Für die Maßzahl ds erhalten wir:

$$d\tau^2 = \pm\, ds^2 = \varkappa^{-2}\, d\varepsilon^2,$$

woraus man das Transformationsverhalten von ds unmittelbar ablesen kann.

Die Spiegelungen (15) und (16) kann man in den neuen Koordinaten auf verschiedene Weisen definieren. P z. B. durch

$$\begin{aligned} &\eta^{0\prime} = \eta^0, \quad \eta^{i\prime} = -\eta^i, \quad i = 1, 2, 3,\\ &\varkappa' = \varkappa, \quad \lambda' = \lambda; \end{aligned} \tag{23a}$$

oder:

$$\begin{aligned} &\eta^{0\prime} = -\eta^0, \quad \eta^{i\prime} = \eta^i,\\ &\varkappa' = -\varkappa, \quad \lambda' = -\lambda \end{aligned} \tag{23b}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} &\eta^{\mu\prime} = \eta^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,\\ &\varkappa' = -\varkappa, \quad \lambda' = -\lambda, \end{aligned} \tag{23c}$$

wenn man $\eta^0 = x^0|\varkappa|$, $\eta^i = x^i \cdot \varkappa$ setzt[58]). Die letzte Transformation ist jedoch zu den beiden ersten nicht äquivalent, da sie zu einer anderen Determinante führt. Die Mehrdeutigkeit kommt dadurch herein, daß man wegen (17) nicht $\varkappa > 0$ vorschreiben kann; denn $\sigma(x)$ ist nicht immer positiv. Entsprechendes wie (23) gilt für die Zeitumkehr T.

Die Transformation mittels reziproker Radien lautet:

$$\begin{aligned} R\colon\ &\eta^{\mu\prime} = \eta^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,\\ &\varkappa' = -\lambda, \quad \lambda' = -\varkappa. \end{aligned} \tag{24}$$

Statt dessen hätten wir auch

$$\begin{aligned} &\eta^{\mu\prime} = -\eta^\mu,\\ &\varkappa' = \lambda, \quad \lambda' = \varkappa \end{aligned}$$

schreiben können.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß die allgemeine konforme Gruppe C_{15} ebenso wie die Lorentz-Gruppe aus vier getrennten Stücken besteht[59]). Man erhält die übrigen drei Stücke C^r, C^t und C^{rt} aus C_{15}^+ durch die Operationen P, T, R und $\overline{R}$, wobei $\overline{R}$

$$\eta^{\mu\prime} = \eta^\mu, \quad \varkappa' = \lambda, \quad \lambda' = \varkappa$$

bedeutet.

---

[59]) R. Brauer u. H. Weyl, Amer. J. Math. **57**, 425 (1935).

Indem man vorübergehend die Koordinaten η^4 und η^5 einführt, sieht man, daß C^r durch P oder R, C^t durch T oder R und C^{rt} durch PT, $P\bar{R}$, RT oder $R\bar{R}$ erzeugt werden.

II. Darstellungstheoretische Analyse

1. Die Liesche Algebra

Da die Struktur der Vertauschungsrelationen der die infinitesimalen Transformationen erzeugenden Operatoren O_ν einer Lieschen Gruppe unabhängig von der speziellen Art der Darstellung ist, können wir diese Relationen aus einer beliebigen treuen Darstellung gewinnen. Für die Gruppe C_{15}^+ wählen wir dazu die Drehungen Ia—IVa. Die O_ν sind definiert durch

$$d\eta' = d\eta + O_\nu \tau^\nu d\eta, \quad d\eta = \begin{pmatrix} d\eta^0 \\ \vdots \\ d\eta^3 \\ d\varkappa \\ d\lambda \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die τ^ν sind die 15 unabhängigen infinitesimalen kanonischen Parameter der Gruppe C_{15}^+. Die Parameter a^μ und c^μ sind schon kanonisch. Bei L_6^+ und D_1 setzen wir:

$$l^\mu_{\cdot\nu} = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_{\cdot\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu};$$
$$\varrho = 1 + \alpha.$$

Durch Vergleich von Ia—IVa mit (1) können wir die O_ν bestimmen. Nennen wir die Erzeugenden der Translationen P_μ, die der homogenen Lorentz-Transformationen $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, die der Skalentransformationen D und schließlich die der speziellen konformen Transformationen K_μ, so ist z. B.:

$$P_0 = \left(\begin{array}{cccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right), \qquad D = \left(\begin{array}{cccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right).$$

Die Punkte bedeuten Nullen!

Multiplizieren wir diese Operatoren noch mit i, so erhalten wir als Vertauschungsrelationen [24][46]:

$$[M_{\varkappa\lambda}, M_{\mu\nu}] = i\,(g_{\lambda\mu} M_{\varkappa\nu} - g_{\varkappa\mu} M_{\lambda\nu} + g_{\varkappa\nu} M_{\lambda\mu} - g_{\lambda\nu} M_{\varkappa\mu}) \tag{2a}$$
$$[M_{\varkappa\lambda}, P_\mu] = i\,(g_{\lambda\mu} P_\varkappa - g_{\varkappa\mu} P_\lambda) \tag{2b}$$
$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{2c}$$
$$[D, M_{\mu\nu}] = 0 \tag{2d}$$
$$[D, P_\mu] = i\,P_\mu \tag{2e}$$
$$[D, K_\mu] = -i\,K_\mu \tag{2f}$$
$$[K_\mu, K_\nu] = 0 \tag{2g}$$
$$[K_\lambda, P_\mu] = 2i\,(g_{\lambda\mu} D - M_{\lambda\mu}) \tag{2h}$$
$$[M_{\varkappa\lambda}, K_\mu] = i\,(g_{\lambda\mu} K_\varkappa - g_{\varkappa\mu} K_\lambda). \tag{2i}$$

Aus (2h) entnimmt man, daß sich mittels Translationen und speziellen konformen Transformationen die homogene Lorentz-Gruppe und die Dilatationen erzeugen lassen. Da man andererseits aber wegen I, (13) die Gruppe C_4^+ aus Translationen und Spiegelung mittels reziproker Radien aufbauen kann, läßt sich die gesamte Gruppe C_{15}^+ aus den Gruppen T_4 und R konstruieren.

Im Zusammenhang mit (2h) ist noch folgende Beziehung besonders interessant, die man auf dem gleichen Wege wie jene gewinnt:

$$K_\mu P_\nu - K_\nu P_\mu = -2i M_{\mu\nu}; \qquad \nu, \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{3}$$

Für räumliche Indizes entsprechen die Gln. (3) bis auf den Faktor $-2i$ genau der Definition des Drehimpulses in der klassischen Mechanik:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{p}.$$

Es liegt deshalb die Vermutung nahe, daß der Imaginärteil von K_μ in bestimmten Darstellungen eng mit den Koordinaten x_μ zusammenhängt. Das wird sich bestätigen! Wegen dieser Eigenschaft der K_μ bedeutet (2h) für $\lambda = \mu$ eine Verallgemeinerung der Vertauschungsrelationen der gewöhnlichen Quantenmechanik: Der Kommutator von Orts- und Impulsoperator ist keine c-Zahl mehr, sondern, bis auf Zahlenfaktoren, der Dilatationsoperator D!

Aus der Tab. 2 sieht man ferner, wie sich die vier Gruppen I—IV so zusammenfassen lassen, daß neue echte Untergruppen der C_{15}^+ entstehen:

$$G_5 = (L_6^+, D_1), \quad G_6 = (L_6^+, T_4), \quad G_7 = (L_6^+, C_4^+), \quad G_8 = (T_4, D_1),$$
$$G_9 = (C_4^+, D_1), \quad G_{10} = (L_6^+, D_1, T_4), \quad G_{11} = (L_6^+, D_1, C_4^+).$$

Wichtig ist, daß der Komplex (T_4, C_4^+) keine echte Untergruppe ist, sondern schon die ganze Gruppe C_{15}^+ selbst bildet. Das liefert noch ein Argument für die physikalische Interpretation. Wenn man, wie es in der Literatur[38])[39]) geschieht, die C_4^+ als Beschleunigungstransformationen, also als maßstabsfest ansieht, die Dilatationen aber als Eichgruppe, so ist physikalisch schwer zu verstehen, wieso das Produkt von maßstabsfesten Transformationen, C_4^+ und T_4, eine Eichtransformation ergeben soll. Bei unserer Deutung tritt diese Schwierigkeit nicht auf.

Weiter entnimmt man aus (2), daß die Translationen in G_6, G_8 und G_{10}, die speziellen konformen Transformationen in G_7, G_9 und G_{11} Normalteiler sind. Die ganze Gruppe C_{15}^+ dagegen ist wieder einfach!

2. Das Eigenwertspektrum der Dilatationen und die indefinite Metrik

Wir denken uns nun die Gruppe C_{15}^+ dargestellt in einem Raum mit einer metrischen Bilinearform, über die wir nicht voraussetzen, daß sie positiv definit ist. Daß es solche Darstellungen gibt, sieht man an den Drehungen Ia—IVa. Die Operatoren in (2) sind dann g-hermitesch (s. Anhang).

Ist A ein g-hermitescher Operator, dem klassisch eine Größe mit der Längendimension (L^m) entspricht, so erwarten wir, wenn wir noch $\varrho = e^\alpha$ setzen:

$$\overline{A} = e^{i\alpha D} A \, e^{-i\alpha D} = e^{m\alpha} A. \tag{4}$$

Das ist in Einklang mit (2); denn für $|\alpha| \ll 1$ erhalten wir für $A = M_{\mu\nu}$ wegen $m = 0$:

$$[D, M_{\mu\nu}] = 0,$$

und für $A = P_\mu$ wegen $m = -1$:

$$i\,[D, P_\mu] = -P_\mu,$$

sowie schließlich für $A = K_\mu$ wegen $m = 1$:

$$i\,[D, K_\mu] = K_\mu.$$

Wir definieren also im Hilbert-Raum die Dimension einer Größe durch ihren Kommutator mit dem Dilatationsoperator D: A hat die Längendimension (L^m), wenn gilt:

$$i\,[D, A] = m\,A.$$

Hat der Operator A den Eigenwert a mit dem zugehörigen Eigenvektor $|a\rangle$, so hat nach (4) $\bar{A}$ den Eigenwert $e^{m\alpha}\,a$, wenn wir $\bar{A}$ auf $|a\rangle$ anwenden. Wir bekommen also den transformierten Eigenwert, wenn wir den Eigenvektor untransformiert lassen:

$$\bar{A}\,|a\rangle = e^{m\alpha}\,a\,|a\rangle.$$

Um das Eigenwertspektrum des Operators D zu bestimmen, gehen wir aus von den Relationen (2e), (2f) und (2h), und zwar für $\lambda = \mu = 0$:

$$[D, P_0] = i\,P_0 \tag{5a}$$

$$[D, K_0] = -i\,K_0 \tag{5b}$$

$$[K_0, P_0] = 2i\,D. \tag{5c}$$

Ist nun $|s\rangle$ ein Eigenvektor von D zum Eigenwert s, für den ferner noch

$$P_0\,|s\rangle \neq 0, \quad K_0\,|s\rangle \neq 0$$

gilt, so folgt aus (5a) und (5b):

$$D\,P_0\,|s\rangle = (s + i)\,P_0\,|s\rangle \quad D\,K_0\,|s\rangle = (s - i)\,K_0\,|s\rangle.$$

$P_0\,|s\rangle$ bzw. $K_0\,|s\rangle$ sind also ebenfalls Eigenvektoren von D mit den Eigenwerten $s + i$ bzw. $s - i$. Für Darstellungen endlichen Grades bedeutet dies, daß D kein hermitescher Operator in einem Raum mit positiv definiter Metrik sein kann, da solche Operatoren nur reelle Eigenwerte haben. Wohl aber kann ein g-hermitescher Operator komplexe Eigenwerte haben. Wenn wir also überhaupt eine Metrik einführen wollen, so kann es nur eine indefinite sein. Das liegt daran, daß die Gruppe C_{15}^+ nichtkompakt ist.

Der vorige Schluß läßt sich aus physikalischen Gründen auf Darstellungsräume unendlicher Dimension übertragen: Bei unitären Darstellungen der C_{15}^+, die von unendlicher Dimension sein müssen, kann $|s\rangle$ sicher nicht zum betreffenden Hilbert-Raum gehören, da man sonst wie oben schließen könnte. Dies bedeutet, daß das Spektrum von D kontinuierlich sein muß. Nun werden wir in 5 sehen, daß in den physikalisch interessanten Fällen ein kontinuierliches Spektrum von D zu unendlich vieldeutigen Funktionen führen würde. Solche Funktionen sind aber physikalisch sinnlos, da man ja doch eine eindeutige Abbildung der physikalischen Situation auf die mathematischen

Größen haben möchte. Fordert man nun die Eindeutigkeit der Funktionen, so wird das Spektrum von D diskret. Man kann dann jedoch keine unitären Darstellungen im Sinne einer positiv definiten Metrik mehr haben. Es sieht daher so aus, als ob die unitären Darstellungen[32][33][45][46] gerade nicht die physikalisch interessanten sind[60]).

Satz: Bei einem Darstellungsraum endlicher Dimension sind die Eigenwerte von D mit Ausnahme der Null rein imaginär. Der Imaginärteil ist eine ganze oder halbganze Zahl.

Beim Beweis schließen wir uns eng an den des entsprechenden Satzes der dreidimensionalen Drehgruppe an[61]). Da es für die Rechnung bequemer ist, ersetzen wir in den vorigen Formeln s durch $i\,s$:

$$D\,|s\rangle = i\,s\,|s\rangle$$

und

$$D P_0\,|s\rangle = i\,(s+1)\,P_0\,|s\rangle \tag{6a}$$

$$D K_0\,|s\rangle = i\,(s-1)\,K_0\,|s\rangle. \tag{6b}$$

Wir definieren nun:

$$K_0\,|s\rangle = |s-1\rangle \tag{7a}$$

und zeigen:

$$P_0\,|s\rangle = \varrho_s\,|s+1\rangle. \tag{7b}$$

Da der Darstellungsraum nach Voraussetzung eine endliche Dimension hat, gibt es ein größtes $s = S$, so daß

$$P_0\,|S\rangle = 0,$$

d. h. $\varrho_S = 0$ sein muß. Damit ist (7b) für $s = S$ bewiesen. Mit Hilfe von (5c) zeigt man weiter, daß

$$\varrho_{s-1} = \varrho_s + 2s, \qquad s = S, \quad S-1, \quad \text{usw.}; \tag{8}$$

denn es ist:

$$\begin{aligned} P_0\,|s-1\rangle &= P_0\,K_0\,|s\rangle = (K_0\,P_0 - 2i\,D)\,|s\rangle \\ &= K_0\,P_0\,|s\rangle + 2s\,|s\rangle = (\varrho_s + 2s)\,|s\rangle. \end{aligned}$$

Wegen $\varrho_S = 0$ erhält man für die Rekursionsformel (8) die Lösung:

$$\varrho_s = S(S+1) - s(s+1).$$

Wendet man andererseits K_0 wiederholt auf $|S\rangle$ an, so muß es, ebenfalls wegen der endlichen Dimension, schließlich ein s' geben, für das $|s'+1\rangle \neq 0$, aber $|s'\rangle = 0$. Daraus folgt wegen (7b) $\varrho_{s'} = 0$. Die hier in Frage kommende Lösung dieser Gleichung ist $s' = -(S+1)$. Durch Abzählen der Vektoren

$$|S\rangle,\ |S-1\rangle, \ldots, |-S\rangle$$

schließt man, daß $2S+1$ eine natürliche Zahl sein muß, d. h. S kann die Werte $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, usw. annehmen. Für gegebenes S durchläuft s die Werte

$$s = S,\ S-1, \ldots, -S.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

---

[60]) Herrn Professor W. Heisenberg und Herrn Dr. Schlieder danke ich für klärende Diskussionen zu diesen und einigen anderen Fragen.

[61]) B. L. van der Waerden, Die gruppentheor. Methode in d. Quantenmech., Berlin 1932, Kap. III.

Da D rein imaginäre Eigenwerte hat, könnte man zunächst vermuten, daß es schief-hermitesch ist. Diese Annahme widerspricht jedoch den Gln. (5), was man sofort sieht, wenn man dort zum Hermitesch-Konjugierten übergeht.

Als Folgerung unseres Satzes ergibt sich, daß

$$\langle s|s\rangle = 0, \quad \langle -s|s\rangle \neq 0 \quad \text{wenn} \quad s \neq 0;$$

denn die Normen der Eigenvektoren, die zu imaginären Eigenwerten von g-hermiteschen Operatoren gehören, verschwinden, während das Skalarprodukt von Eigenvektoren, die zu konjugiert-komplexen Eigenwerten gehören, nicht verschwindet (s. Anhang).

Schreiben wir (7a) und (7b) noch etwas symmetrischer, so erhalten wir die Beziehungen

$$P_0\,|s\rangle = \sqrt{(S-s)\,(S+s+1)}\,|s+1\rangle$$
$$K_0\,|s\rangle = \sqrt{(S+s)\,(S-s+1)}\,|s-1\rangle,$$

mit deren Hilfe man leicht verifiziert, daß $|s\rangle$ auch Eigenvektor von

$$\frac{1}{2}(P_0\,K_0 + K_0\,P_0) - D^2$$

zum Eigenwert $S(S+1)$ ist.

Physikalisch bedeutet unser Satz, daß es nur ganze oder halbganze Längendimensionen gibt und daß zu einer positiven Dimension auch immer die entsprechende negative gehört! In 4 wird sich herausstellen, daß zu Tensoren immer ganze, zu Spinoren immer halbganze Längendimensionen gehören. Hieraus folgt z. B., daß das cgs-System in der Elektrodynamik darstellungstheoretisch inkonsistent ist!

3. Die Unvollständigkeit des Eigenvektorsystems der Energie-Impuls-Operatoren P_μ und der Operatoren K_μ der speziellen konformen Gruppe

Wir wollen folgenden Satz beweisen:

Satz: Es sei A ein g-hermitescher Operator, der mindestens einen von Null verschiedenen Eigenwert und die Längendimension (L^m), $m \neq 0$, hat. Dann ist das Eigenvektorsystem von A unvollständig!

Nach unserer Definition der Längendimension eines Operators gilt für A:

$$i\,[D, A] = m A. \tag{9}$$

Wir nehmen nun an, das Eigenvektorsystem von A sei vollständig und die Metrik des Darstellungsraumes nichtentartet. Dann gilt für jeden Eigenvektor $|a\rangle$ von A (s. Anhang):

$$\langle a^*|a\rangle \neq 0. \tag{10}$$

$|a^*\rangle$ ist der Eigenvektor von A zum konjugiert-komplexen Eigenwert a^*. (10) ist die Verallgemeinerung von $\langle a|a\rangle \neq 0$ bei hermiteschen Operatoren in Räumen mit positiv definiter Metrik.

Wenden wir Gl. (9) auf $|a\rangle$ an und multiplizieren wir von links mit $\langle a^*|$, so erhalten wir:

$$a\,\langle a^*|D|a\rangle - a\,\langle a^*|D|a\rangle = -i\,m\,a\,\langle a^*|a\rangle. \tag{11}$$

Die linke Seite von (11) verschwindet. Da $m \neq 0$, $a \neq 0$ vorausgesetzt war, muß auf der rechten Seite $\langle a^*|a\rangle = 0$ sein, im Gegensatz zur Voraussetzung

(10)! Die Annahme, daß das Eigenvektorsystem von A vollständig ist, führt also zum Widerspruch.

Zu (11) ist jedoch zu bemerken, daß die linke Seite nicht ohne weiteres definiert ist, falls die Größen $\langle a^* | D | a \rangle$ nicht endlich sind. In diesem Fall hat man erst geeignete Grenzübergänge zu definieren. Man denke etwa an die Matrixelemente von ebenen Wellen in Hilbert-Räumen mit positiv definiter Metrik. Dieses Beispiel ist allerdings hier nicht ganz zutreffend, da wir keine positiv definite Metrik mehr voraussetzen können. Unabhängig von den obigen Überlegungen werden wir später sehen, daß unser Satz auch im Funktionenraum für die Operatoren P_μ und K_μ richtig bleibt.

Falls A nur den Eigenwert Null hat und das zugehörige Eigenvektorsystem vollständig ist, muß A der Nulloperator sein! Angewandt auf P_μ und K_μ bedeutet das wegen (2h), daß auch D und $M_{\mu\nu}$ Nulloperatoren sind. Es handelt sich hierbei offenbar um die Darstellung von C_{15}^+ durch die Identität. Werden daher P_μ und K_μ nicht durch den Nulloperator dargestellt und haben sie trotzdem nur den Eigenwert Null, so ist ihr Eigenvektorsystem ebenfalls unvollständig. Wir werden solche Beispiele kennenlernen!

Man sieht hieraus, daß der obige Satz auf den Fall, daß kein Eigenwert $a \neq 0$ existiert, verallgemeinert werden kann, wenn man von der Darstellung durch die Identität absieht!

Angewandt auf die Operatoren P_μ und K_μ liefern die vorstehenden Ergebnisse einige wichtige Konsequenzen für die übliche Quantenfeldtheorie. Die dort auftretenden Divergenzen sind eng verknüpft mit der Spektraldarstellung der Vakuumerwartungswerte von Feldoperatoren wechselwirkender Felder, die von G. Källen[48]) und H. Lehmann[49]) angegeben worden ist. Zu den wenigen wesentlichen Voraussetzungen dieser Darstellung gehören die positiv definite Metrik und die Vollständigkeit des Eigenvektorsystems der Energie-Impuls-Operatoren.

Diese Voraussetzungen sind offenbar nicht mehr erfüllt, wenn man außer der inhomogenen Lorentz-Gruppe noch die Skalentransformationen in Betracht zieht. Da diese Gruppe einem vernünftigen physikalischen Prinzip entspringt, besteht zunächst kein Grund, sie beiseite zu lassen. Vielleicht ist es möglich, in dem durch die Gruppen III und IV erweiterten Darstellungsraum mit einer indefiniten Metrik zu einer konvergenten Quantenfeldtheorie zu kommen. Daß dies nicht leere Hoffnungen sein müssen, hat sich am Lee-Modell[50]) gezeigt. Im Gegensatz zur Folgerung aus der Lehmann-Källenschen Spektraldarstellung ist dort das Verhältnis von renormierter und nichtrenormierter Kopplungskonstante unendlich. Wie W. Pauli und G. Källen nachwiesen[51]), hängt dies damit zusammen, daß das Lee-Modell nur im Rahmen einer indefiniten Metrik konsistent ist.

4. Die Darstellungen endlichen Grades

Die endlichen irreduziblen Darstellungen der homogenen Lorentz-Gruppe gewinnt man im allgemeinen aus der Eigenschaft ihrer Lie-Algebra, das direkte Produkt zweier Lie-Algebren der dreidimensionalen Drehgruppe zu sein[61]). Das ist eine Besonderheit der homogenen Lorentz-Gruppe, die sich auf unseren Fall nicht übertragen läßt. Wir klassifizieren die irreduziblen Darstellungen der eigentlichen konformen Gruppe daher nach E. Cartan[52]) mittels ihrer höchsten Gewichte. Diese Methode ist von H. Weyl eingehend analysiert und ausgebaut worden[62]). Da seine Untersuchungen unsere Gruppe als Sonderfall enthalten, können wir uns kurz fassen und werden die nötigen Sätze lediglich referieren.

Es seien

$$M_1 = M_{01}, \quad M_2 = M_{23}, \quad M_3 = D$$

die Matrizen, welche die den infinitesimalen Parametern $\omega^1 = \omega^{01}$, $\omega^2 = \omega^{23}$, $\omega^3 = \alpha$ zugeordneten Elemente der Lie-Algebra (2) darstellen. Die Eigenwerte

$$h = i\, m_1\, \omega^1 + m_2\, \omega^2 + i\, m_3\, \omega^3 \tag{12}$$

des Operators

$$H = M_1\, \omega^1 + M_2\, \omega^2 + M_3\, \omega^3$$

heißen dann die „Gewichte" der betreffenden Darstellung. Da die Operatoren M_k untereinander und darum auch mit H vertauschen, haben sie einen gemeinsamen Eigenvektorsatz und $i\, m_1$, m_2 und $i\, m_3$ sind Eigenwerte von M_1, M_2 und M_3. Man zeigt, wie in 2 für die Dilatationen, daß die m_k, $k = 1, 2, 3$, reell sind und daß die Ausdrücke

$$\pm\, m_i \pm m_k, \quad i < k,$$

für beliebige Vorzeichenkombinationen ganze Zahlen sein müssen. Daraus folgt, daß die m_k entweder alle ganze oder alle halbganze Zahlen sind.

Ähnlich läßt sich nachweisen, daß man aus einem Gewicht h der Gestalt (12) wieder ein Gewicht erhält, wenn man dort je zwei der m_k miteinander vertauscht, bzw. miteinander vertauscht und gleichzeitig die Vorzeichen wechselt. Diese Eigenschaft ist wichtig für die Bestimmung der höchsten Gewichte: Ein Gewicht

$$h' = i\, m_1'\, \omega^1 + m_2'\, \omega^2 + i\, m_3'\, \omega^3$$

heißt höher als das Gewicht (12), wenn der erste von Null verschiedene Koeffizient $m_i' - m_i$ in $h' - h$ positiv ist.

Der wesentliche, von E. Cartan[52]) stammende Satz ist nun:

Jede irreduzible Darstellung ist durch ihr höchstes Gewicht eindeutig bestimmt und dieses Gewicht ist von der Vielfachheit 1.

Vielfachheit 1 bedeutet, daß der zugehörige Eigenvektorraum eindimensional ist.

Nennen wir die Koeffizienten des höchsten Gewichtes $\overline{m}_k$, so folgt aus den oben aufgezählten Eigenschaften der Gewichte:

$$\overline{m}_1 \geqq \overline{m}_2 \geqq \overline{m}_3, \quad \overline{m}_i + \overline{m}_k \geqq 0, \quad i \neq k.$$

Diese beiden Bedingungen kann man zusammenfassen zu

$$\overline{m}_1 \geqq \overline{m}_2 \geqq |\overline{m}_3|. \tag{13}$$

$\overline{m}_3$ kann auch negativ sein.

Zu jeder Kombination von entweder drei ganzen oder drei halbganzen Zahlen, welche die Bedingung (13) erfüllen, gehört eine irreduzible Darstellung der Gruppe C_{15}^+. Die Frage ist nun, wie man die betreffenden Darstellungen gewinnen kann. Eine Methode, aus gegebenen Darstellungen andere zu erzeugen,

---

[62]) H. Weyl, Math. Z. **23**, 271, (1925) u. **24**, 328 (1926).

ist die Kronecker-Multiplikation. Da sich bei ihr die Gewichte addieren und da man jedes höchste Gewicht $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$ aus den höchsten Gewichten

$$\begin{gathered} h_1 = i\,\omega^1 \\ h_+ = \frac{1}{2}(i\,\omega^1 + \omega^2 + i\,\omega^3), \qquad h_- = \frac{1}{2}(i\,\omega^1 + \omega^2 - i\,\omega^3) \end{gathered} \tag{14}$$

durch Multiplikation mit nichtnegativen ganzen Zahlen

$$\begin{gathered} p_1 = \bar{m}_1 - \bar{m}_2, \\ p_+ = \bar{m}_2 + \bar{m}_3, \quad p_- = \bar{m}_2 - \bar{m}_3 \end{gathered}$$

erhalten kann, läßt sich die Darstellung $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$ folgendermaßen erzeugen: Die zu den höchsten Gewichten h_1, h_+ und h_- gehörigen Darstellungen seien $\Delta^{(1)}, \Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$. Man bilde die reduzible Darstellung

$$\Delta = (\Delta^{(1)})^{p_1} \times (\Delta^{(+)})^{p_+} \times (\Delta^{(-)})^{p_-},$$

wobei

$$(\Delta^{(1)})^{p_1} = \Delta^{(1)} \times \Delta^{(1)} \times \cdots \times \Delta^{(1)}, \quad (p_1 \text{ Faktoren!}) \text{ usw.}$$

Sind die Vektoren v_1, v_+ und v_- die zu h_1, h_+ und h_- gehörigen Eigenvektoren, so gehört der Vektor

$$v = v_1^{p_1} \times v_+^{p_+} \times v_-^{p_-}$$

zum höchsten Gewichte $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$. Den diesem Gewicht zugeordneten irreduziblen Teilraum von Δ erhält man durch Anwenden aller Operatoren der Algebra (2) auf v. Da nach Weyl alle reduziblen Darstellungen unimodularer Transformationsgruppen zerfallen[59]), kann man die so erhaltene Darstellung zum höchsten Gewichte $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$ abspalten. Womit unser Ziel im Prinzip erreicht ist, wenn wir die Darstellungen $\Delta^{(1)}, \Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ kennen.

Die ebenfalls von Weyl[62]) allgemein abgeleitete Formel für den Grad n der Darstellungen lautet in unserem Spezialfall $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$:

$$\begin{aligned} n = \frac{1}{12}&(\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + 3)(\bar{m}_1 + \bar{m}_3 + 2)(\bar{m}_2 + \bar{m}_3 + 1) \\ &(\bar{m}_1 - \bar{m}_2 + 1)(\bar{m}_1 - \bar{m}_3 + 2)(\bar{m}_2 - \bar{m}_3 + 1). \end{aligned}$$

Daraus entnimmt man, daß $\Delta^{(1)}$ vom Grad 6, $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ je vom Grade 4 sind.

$\Delta^{(1)}$ ist, wie sich zeigen wird, die durch die Transformationen Ia—IVa gegebene sechsdimensionale Vektordarstellung. $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ sind zwei inäquivalente vierdimensionale Spindarstellungen, die sich mittels der Diracschen γ-Matrizen konstruieren lassen.

Wir beginnen mit den Darstellungen $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$, da wir durch sie eine physikalische Deutung des Dilatationsoperators D finden werden, die sich auf die Darstellung $\Delta^{(1)}$ übertragen läßt. Bei der Konstruktion der beiden Spindarstellungen gehen wir in der gleichen Weise vor wie P. A. M. Dirac bei der homogenen Lorentz-Gruppe[63]). Da sein Verfahren von H. Weyl und R. Brauer[59]) für Drehungen beliebiger Dimensionen erweitert worden ist, können wir deren Ergebnisse unmittelbar übernehmen. In unserem Fall werden sie dadurch besonders durchsichtig, daß, wie erwähnt, die Diracschen γ-Matrizen und ihre Produkte eine Darstellung der Lieschen Algebra

[63]) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **117**, 610 (1927) u. **118**, 351 (1928).

der eigentlichen konformen Gruppe bilden. Hierauf haben vor allem F. Bopp und F. L. Bauer[29–31]), später auch W. A. Hepner[64]) hingewiesen.

Im folgenden ist es bequem, die in Kap. I erwähnten Koordinaten η^4 und η^5 zu benutzen.

Durch Linearisieren der quadratischen Form I, (22) erhalten wir:

$$d\varepsilon^2 = (\beta_\mu\, d\eta^\mu + \beta_4\, d\eta^4 + \beta_5\, d\eta^5)^2. \tag{15}$$

Die β haben die Bedingungen

$$\begin{gathered} \beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu = 2 g_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \\ \beta_4^2 = -1, \quad \beta_4 \beta_\mu + \beta_\mu \beta_4 = 0, \qquad \beta_5^2 = 1, \quad \beta_\mu \beta_5 + \beta_5 \beta_\mu = 0, \\ \beta_4 \beta_5 + \beta_5 \beta_4 = 0 \end{gathered} \tag{16}$$

zu erfüllen. Dies wird erreicht durch

$$\beta_\mu = \gamma_\mu \times \sigma_1, \qquad \beta_4 = \gamma_5 \times \sigma_1, \qquad \beta_5 = 1 \times \sigma_2. \tag{17}$$

Hierbei sind die γ_μ die durch

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu}, \qquad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

definierten Dirac-Matrizen und

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Paulischen Spin-Matrizen.

Die erzeugenden Operatoren der infinitesimalen Drehungen sind, analog wie bei der Lorentz-Gruppe, gegeben durch

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \beta_\mu \beta_\nu = \frac{i}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu \times 1, \qquad & M_{\mu 4} &= \frac{i}{2} \beta_\mu \beta_4 = \frac{i}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \times 1 \\ M_{\mu 5} &= \frac{i}{2} \beta_\mu \beta_5 = -\frac{1}{2} \gamma_\mu \times \sigma_3, \qquad & M_{45} &= \frac{i}{2} \beta_4 \beta_5 = -\frac{1}{2} \gamma_5 \times \sigma_3. \end{aligned} \tag{18}$$

Man sieht, daß die achtdimensionale Darstellung (18) in zwei vierdimensionale zerfällt. Dies sind, wie sich zeigen wird, die gesuchten Darstellungen $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$. Berücksichtigen wir noch die Beziehungen

$$\begin{gathered} D = M_{45} \\ P_\mu = -M_{\mu 4} - M_{\mu 5}, \qquad K_\mu = M_{\mu 4} - M_{\mu 5}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \end{gathered}$$

die man unmittelbar aus den Drehungen Ia—IVa abliest, so erhalten wir für $\Delta^{(+)}$:

$$\begin{aligned} \overset{1}{M}_{\mu\nu} &= \frac{i}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \qquad & \overset{1}{D} &= -\frac{1}{2} \gamma_5 \\ \overset{1}{P}_\mu &= \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 - i \gamma_5), \qquad & \overset{1}{K}_\mu &= \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 + i \gamma_5) \end{aligned} \tag{19a}$$

und für $\Delta^{(-)}$:

$$\begin{aligned} \overset{2}{M}_{\mu\nu} &= \frac{i}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \qquad & \overset{2}{D} &= \frac{1}{2} \gamma_5 \\ \overset{2}{P}_\mu &= -\frac{1}{2} \gamma_\mu (1 + i \gamma_5), \qquad & \overset{2}{K}_\mu &= -\frac{1}{2} \gamma_\mu (1 - i \gamma_5). \end{aligned} \tag{19b}$$

---

[64]) W. A. Hepner, Preprint; s. auch R. L. Ingraham, Nuovo Cimento **10**, 1060 (1958).

Man bestätigt leicht, daß diese Operatoren die richtigen Vertauschungsrelationen erfüllen. Ferner sieht man sofort, daß die beiden Darstellungen (19a) und (19b) inäquivalent sind; denn eine Ähnlichkeitstransformation S müßte die Eigenschaft haben, sowohl die γ_μ wie auch γ_5 in die dazu negativen Matrizen zu transformieren. Wegen der Definition von γ_5 kann es ein solches S aber nicht geben!

Schließlich haben wir noch nachzuweisen, daß (19a) und (19b) tatsächlich die behaupteten Darstellungen sind. Wählen wir für die γ_μ die Darstellung

$$\gamma_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right), \quad \gamma_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right),$$

$$\gamma_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & -i \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & i & 0 \\ \hline 0 & i & & \\ -i & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right), \quad \gamma_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right),$$

$$\gamma_5 = \left(\begin{array}{cc|cc} -i & 0 & & \\ 0 & -i & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & i & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & i \end{array}\right)$$

und bezeichnen wir mit

$$u_1 = (1, 0, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0, 0), \quad u_3 = (0, 0, 1, 0), \quad u_4 = (0, 0, 0, 1)$$

die Basisvektoren im Darstellungsraum von (19a), so erhalten wir als Eigenwerte und Eigenvektoren der Operatoren $\overset{1}{M}_{01}$, $\overset{1}{M}_{23}$ und $\overset{1}{D}$:

$$\begin{array}{lll} \text{Eigenvektoren von } \overset{1}{M}_{01} & \text{zum Eigenwert} & \frac{1}{2} i:\ u_1 + u_2,\ u_3 - u_4; \\ & \text{zum Eigenwert} & -\frac{1}{2} i:\ u_1 - u_2,\ u_3 + u_4; \end{array} \tag{20a}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Eigenvektoren von } \overset{1}{M}_{23} & \text{zum Eigenwert} & \frac{1}{2}:\ u_1 + u_2,\ u_3 + u_4; \\ & \text{zum Eigenwert} & -\frac{1}{2}:\ u_1 - u_2,\ u_3 - u_4; \end{array} \tag{20b}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Eigenvektoren von } \overset{1}{D} & \text{zum Eigenwert} & \frac{1}{2} i:\ u_1, u_2; \\ & \text{zum Eigenwert} & -\frac{1}{2} i:\ u_3, u_4. \end{array} \tag{20c}$$

Man sieht, daß der Vektor $u_1 + u_2$ Eigenvektor von H zum höchsten Gewicht $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ist. Beim Übergang von (19a) zu (19b) ändert sich das Vorzeichen von γ_5 und wir bekommen als höchstes Gewicht $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Da die verschiedenen Darstellungen der γ_μ alle zueinander äquivalent sind, gelten unsere obigen Aussagen über die Eigenwerte unabhängig von der speziell gewählten Darstellung. Damit ist unsere Behauptung bewiesen!

Im folgenden werden wir die Dirac-Spinoren der beiden Räume $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ mit $\overset{1}{\psi}$ und $\overset{2}{\psi}$ bezeichnen.

Man rechnet leicht nach, daß die Transformationen

$$e^{i \overset{\alpha}{O}_\nu \tau^\nu}, \quad \alpha = 1, 2,$$

wobei $\overset{\alpha}{O}_\nu$ die 15 Operatoren von (19a) bzw. (19b) sind, die indefiniten Formen

$$\overline{\overset{1}{\psi}} \overset{1}{\psi} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\overset{2}{\psi}} \overset{2}{\psi}, \quad \overline{\overset{\alpha}{\psi}} = \overset{\alpha}{\psi}{}^+ \gamma_0, \quad \alpha = 1, 2$$

invariant lassen. Da eine Gruppe mit der Eigenschaft, im vierdimensionalen Diracschen Spinraum eine Bilinearform invariant zu lassen, abgesehen von einer Phasentransformation, maximal 15parametrig sein kann, ist die konforme Gruppe die allgemeinste kontinuierliche Gruppe dieser Art.

Die Operatoren $\overset{\alpha}{O}_\nu$ sind γ_0-hermitesch:

$$\overset{\alpha}{O}_\nu = \gamma_0 \overset{\alpha}{O}{}^+_\nu \gamma_0, \quad \nu = 1, \ldots, 15; \quad \alpha = 1, 2. \tag{21}$$

Damit folgt aus

$$\overset{\alpha}{\psi}{}' = \overset{\alpha}{O}_\nu \overset{\alpha}{\psi}: \qquad \overline{\overset{\alpha}{\psi}}{}' = \overline{\overset{\alpha}{\psi}} \overset{\alpha}{O}_\nu, \quad \alpha = 1, 2.$$

Wenn wir die Darstellungen $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ zu der achtdimensionalen Darstellung Δ zusammenfassen, können wir Größen konstruieren, die sich bei der konformen Gruppe wie Vektoren usw. transformieren.

Es sei

$$\psi = \begin{pmatrix} \overset{1}{\psi} \\ \overset{2}{\psi} \end{pmatrix}$$

ein Spinor der Darstellung Δ. Dann definieren wir den adjungierten Spinor $\tilde{\psi}$ durch[57]):

$$\tilde{\psi} = \psi^+ A, \quad A = -i \beta_0 \beta_5 = \gamma_0 \times \sigma_3 \tag{22}$$

$\tilde{\psi}$ hat also die Gestalt: $\tilde{\psi} = (\overline{\overset{1}{\psi}}, -\overline{\overset{2}{\psi}})$.

$$\tilde{\psi} \psi = \overline{\overset{1}{\psi}} \overset{1}{\psi} - \overline{\overset{2}{\psi}} \overset{2}{\psi} \tag{23}$$

ist eine Invariante bei Δ, da die Summanden einzeln bei $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ invariant sind.

Wie sechsdimensionale Vektoren transformieren sich die Größen:

$$\begin{aligned} b_\mu &= i \tilde{\psi} \beta_\mu \psi = i (\overline{\overset{1}{\psi}} \gamma_\mu \overset{2}{\psi} - \overline{\overset{2}{\psi}} \gamma_\mu \overset{1}{\psi}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ b_4 &= i \tilde{\psi} \beta_4 \psi = i (\overline{\overset{1}{\psi}} \gamma_5 \overset{2}{\psi} - \overline{\overset{2}{\psi}} \gamma_5 \overset{1}{\psi}), \\ b_5 &= i \tilde{\psi} \beta_5 \psi = \overline{\overset{1}{\psi}} \overset{2}{\psi} + \overline{\overset{2}{\psi}} \overset{1}{\psi}. \end{aligned} \tag{24}$$

Bei der Bildung von Vektoren werden offenbar die Darstellungen $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ „gemischt". Aus einer einzelnen von ihnen lassen sich keine Vektoren bilden. Man erkennt ohne weiteres das Bildungsgesetz: Tensoren gerader

Stufe lassen sich aus einer einzelnen der Darstellungen $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ konstruieren, Tensoren ungerader Stufe nur aus beiden. Dies folgt daraus, daß wegen (17) das Produkt einer geraden Anzahl der β zerfällt, das einer ungeraden Anzahl nicht.

Aus (19a) und (19b) entnimmt man wegen $(1 + i\gamma_5)(1 - i\gamma_5) = 0$, daß

$$\overset{\alpha}{P}_\mu \overset{\alpha}{P}{}^\mu = 0; \qquad \overset{\alpha}{K}_\mu \overset{\alpha}{K}{}^\mu = 0; \qquad \alpha = 1, 2.$$

Die Darstellungen gehören also zur Masse Null!

Die Impulse $\overset{\alpha}{P}_\mu$ haben nur den zweifach entarteten Eigenwert Null, ebenso die Operatoren $\overset{\alpha}{K}_\mu$. Das Eigenvektorsystem ist daher in Übereinstimmung mit unserem allgemeinen Satz unvollständig. Zusammen bilden die Eigenvektoren der $\overset{\alpha}{P}_\mu$ und $\overset{\alpha}{K}_\mu$ jedoch ein vollständiges System. Dies ist zu erwarten, da sowohl die Eigenvektoren von $M_{\mu 4}$ wie von $M_{\mu 5}$ vollständig sind.

Besonders wichtig ist, daß die Dilatationen durch $\frac{1}{2}\gamma_5$ dargestellt werden. Damit haben wir einerseits die Möglichkeit, die experimentellen Konsequenzen der Dilatation-Invarianz zu prüfen, da der Zusammenhang des „Chirality"-Operators $i\gamma_5$[53]) mit den Experimenten bei schwachen Wechselwirkungen eingehend untersucht ist[65])[66]). Die Bedeutung dieses Operators liegt darin, daß seine Eigenwerte $+1$ und -1 die Helizität

$$\mathfrak{H} = \langle\vec{\sigma}\rangle \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

der Antineutrinen bzw. Neutrinen, und im extrem-relativistischen Grenzfall bei schwachen Wechselwirkungen auch die Helizität der Fermionen mit Masse beschreiben. $\langle\vec{\sigma}\rangle$ ist der Erwartungswert des Paulischen Spinvektors und $\vec{p}$ der räumliche Impuls.

Andererseits kann man sagen, daß die γ_5-Invarianz einen wohldefinierten physikalischen Sinn hat, da sie eine Folge der Maßstabsunabhängigkeit der Physik ist.

Die endlichen Transformationen

$$e^{-\frac{1}{2} i \lambda \gamma_5}$$

bilden die Touschek-Gruppe[67]). Diese stellt sich hier als ein Sonderfall der Skalentransformationen heraus!

Die diskreten Transformationen der allgemeinen konformen Gruppe seien am Beispiel der räumlichen Spiegelungen behandelt. Damit die Form

$$\beta_\mu \, d\eta^\mu + \beta_4 \, d\eta^4 + \beta_5 \, d\eta^5 \tag{25}$$

bei

$$d\eta^0 \to d\eta^0, \quad d\eta^i \to -d\eta^i, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$d\eta^4 \to d\eta^4, \quad d\eta^5 \to d\eta^5$$

---

[65]) L. Grodzins, Progr. in Nucl. Phys. 7, 163 (1959).
[66]) J. J. Sakurai, Progr. in Nucl. Phys. 7, 243 (1959).
[67]) B. F. Touschek, Nuovo Cimento 5, 1281 (1957).

invariant bleibt, muß der Paritätsoperator P die Eigenschaften

$$P\beta_0 P^{-1} = \beta_0, \quad P\beta_i P^{-1} = -\beta_i,$$
$$P\beta_4 P^{-1} = \beta_4, \quad P\beta_5 P^{-1} = \beta_5$$

haben. Dies leistet

$$P = \beta_0\beta_4\beta_5 = \gamma_0\gamma_5\times\sigma_2. \tag{26}$$

Bei diesem P transformieren sich die Operatoren der Darstellung Δ erwartungsgemäß:

$$\begin{aligned} &M_{0k} \to -M_{0k}, \quad && P_0 \to P_0, \\ &M_{ik} \to M_{ik}, && P_i \to -P_i, \quad && i, k = 1, 2, 3. \\ &D \to D, && K_0 \to K_0, \\ & && K_i \to -K_i, \end{aligned}$$

Man sieht ferner aus (26), daß P die beiden Darstellungen $\Delta^{(+)}$ und $\Delta^{(-)}$ wechselseitig aufeinander abbildet. Der bei Dirac-Spinoren übliche Paritätsoperator γ_0 stellt sich als das Produkt von P und R heraus: Da die Spiegelung mittels reziproker Radien gegeben ist durch

$$d\eta^{4\prime} = -d\eta^4, \text{ alle übrigen } d\eta \text{ fest},$$

kann man für R

$$R = i\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\beta_5 = i\gamma_5\times\sigma_2 \tag{27}$$

wählen. Aus (26) und (27) folgt die Behauptung:

$$P\cdot R = -i\gamma_0\times 1.$$

Falls man im Diracschen Spinraum nur homogene Lorentz-Transformationen betrachtet und die Translationen sowie die übrigen Transformationen dort durch die Einheit charakterisiert, lassen sich die räumlichen Spiegelungen mittels γ_0 bekanntlich so definieren, daß sie nicht aus dem Raum herausführen. Dies ist offenbar äquivalent damit, daß man R durch die Einheit darstellt.

Man sieht, daß die Paritätsverletzung nicht an die Zwei-Komponenten-Theorie gebunden ist, sondern daß sie auch bei Dirac-Spinoren schon auftritt. Diese erscheinen daher besonders geeignet zur Beschreibung der schwachen Wechselwirkung! Das wird bestätigt durch folgende Überlegung: Will man aus vier Dirac-Spinoren ψ_1, ψ_2, ψ_3 und ψ_4 in der Art der bisher üblichen Theorie eine 4-Fermionen-Wechselwirkung bilden, so ist einer der physikalisch einfachsten Ansätze offenbar

$$\begin{gathered} g(\overline{\psi}_1 P_\mu \psi_2 \overline{\psi}_3 P^\mu \psi_4 + \overline{\psi}_2 P_\mu \psi_1 \overline{\psi}_4 P^\mu \psi_3) \\ P_\mu = -\frac{1}{2}\gamma_\mu(1 + i\gamma_5), \quad g\text{: Kopplungskonstante.} \end{gathered} \tag{28}$$

Dies ist aber gerade die Kopplung, mit der man in den letzten Jahren so erfolgreich die schwachen Wechselwirkungen beschrieben hat[46][53])!

Der Ansatz (28) ist jedoch noch zu sehr auf die inhomogene Lorentz-Gruppe zugeschnitten, er ist weder dilatations- noch konforminvariant. Aber er hat gegenüber der mit γ_μ gebildeten sogenannten „Vektorkopplung" den wesentlichen Vorteil, translationsinvariant zu sein! Die Vektorkopplung ist deswegen nicht gegenüber Translationen invariant, weil diese jetzt im Spinraum nicht mehr durch die Einheit, sondern durch (19a) bzw. (19b) dargestellt werden! Welche die nach allen Seiten befriedigendste Form der Kopplung ist, läßt sich wohl nur bei einer im Rahmen der allgemeinen konformen Gruppe konsequenten Theorie der schwachen Wechselwirkungen entscheiden, die an dieser Stelle aber nicht ausgearbeitet werden soll.

Es ist noch zu zeigen, daß die Drehungen Ia—IVa eine Darstellung $\Delta^{(1)}$ bilden. Bei diesen erhalten wir als Eigenwerte von D: 0, i und $-i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind:

$$\begin{aligned} i\,s = 0: &\quad u_0 = (1,0,0,0,0,0), \quad u_1 = (0,1,0,0,0,0), \\ &\quad u_2 = (0,0,1,0,0,0), \quad u_3 = (0,0,0,1,0,0); \\ i\,s = i: &\quad u_5 = (0,0,0,0,0,1); \\ i\,s = -i: &\quad u_4 = (0,0,0,0,1,0). \end{aligned} \tag{29}$$

Durch Umnumerieren und Beachten der Realitätsverhältnisse gewinnt man daraus Eigenwerte und Eigenvektoren von M_1 und M_2. Man sieht, daß beliebige Eigenvektoren von

$$H = M_1\,\omega^1 + M_2\,\omega^2 + D\omega^3$$

immer zum Eigenwert Null von je zweien der drei Operatoren M_1, M_2 und D gehören. Daraus folgt die Behauptung: die Drehungen Ia—IVa bilden eine Darstellung $\Delta^{(1)} = (1, 0, 0)$.

Man verifiziert ferner unser allgemeines Ergebnis von 3: Das Eigenvektorsystem der Operatoren P_μ und K_μ ist unvollständig. Die Eigenwerte sind insgesamt Null und die Eigenvektoren eines der P_μ bzw. K_μ bilden eine vierdimensionale, die aller vier P_μ bzw. K_μ eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit. Die Eigenvektoren der K_μ und P_μ zusammen bilden dagegen ein vollständiges System!

P^2 hat ebenfalls nur den Eigenwert Null, die Darstellung $\Delta^{(1)}$ gehört daher zu Teilchen mit der Masse Null. Wir werden in 6 sehen, daß sich das Maxwellsche Feld nach ihr transformiert. Wir wollen deshalb den Operator D noch etwas näher betrachten. Bei den Spinoren haben wir angenommen, daß die Eigenwerte von $2iD$ die Helizität der Neutrinen und Antineutrinen beschreiben. Übertragen wir das auf die Photonen, so müßten sie die Helizitäten 2, -2 und 0 haben. Dem entspricht zunächst, daß es rechts- und linkszirkular polarisiertes Licht gibt. Helizität 0 bedeutet, daß der Spin senkrecht zur Bahn steht. Solche „longitudinalen" Photonen sind bisher nicht beobachtet worden und werden durch die Maxwellschen Gleichungen verboten. Es wird sich zeigen, daß entsprechende Bedingungsgleichungen auch in unserem Fall derartige Photonen nicht zulassen. Die von den Spindarstellungen übernommene Hypothese, daß der Dilatationsoperator D den Schraubungssinn der Teilchen beschreibt, scheint also auch beim elektromagnetischen Feld im Einklang mit der Erfahrung zu sein. Eine endgültige Entscheidung läßt sich allerdings auch hier wohl nur im Zusammenhang mit einer dynamischen Theorie treffen.

Vergleichen wir die obigen Ergebnisse mit denen von Kap. I und berücksichtigen wir noch, daß im allgemeinen die untersuchten Spinoren, Vektoren usw. Funktionen des Ortes sind, so kann man sagen, daß die solchen Feldern zugeordneten Längendimensionen Quantenzahlen der zu diesen Feldern gehörigen Teilchen sind. Ob sich dies auf andere Grundgrößen, wie Geschwindigkeit und Wirkung, übertragen läßt, bedarf weiterer Untersuchungen!

5. Darstellungen im Funktionenraum

Um die Operatoren D und K_μ auch in Darstellungsräumen nichtendlicher Dimension zu untersuchen, wählen wir als ersten den Raum $R[x]$ der Funktionen $f(x)$ mit den Koordinaten x^μ als Argumenten. Hier hat D die Gestalt:

$$D = \frac{1}{i} x^\mu \partial_\mu . \tag{30}$$

Das sieht man so ein: Es sei $\varphi(x)$ eine Funktion, die mindestens einmal differenzierbar sein soll und die sich bei der Skalentransformation mit einer Potenz von ϱ, z. B. ϱ^{-1} multipliziere — diese zunächst etwas merkwürdig erscheinende Potenz ist deshalb gewählt, weil sich das noch zu diskutierende Skalare Feld so transformiert; für die Ableitung von (30) ist die spezielle Wahl der Potenz ohne Belang —. Gehen wir zu infinitesimalen Transformationen über, so gilt:

$$\delta x^\mu = \alpha\, x^\mu, \quad |\alpha| \ll 1;$$
$$\delta\varphi = \varphi'(x') - \varphi(x) = -\alpha\, \varphi(x).$$

Aus beidem erhält man:

$$\delta_0 \varphi = \varphi'(x) - \varphi(x) = -\alpha[\varphi(x) + x^\mu\, \partial_\mu \varphi(x)].$$

Dem zweiten Summanden auf der rechten Seite der letzten Gleichung entnimmt man die Behauptung.

Um die Eigenfunktionen $f_s(x)$ von D zu finden, haben wir nach (30) die Differentialgleichung

$$\frac{1}{i} x^\mu\, \partial_\mu\, f_s(x) = i\, s\, f_s(x) \tag{31}$$

zu lösen. Den Faktor i auf der rechten Seite haben wir wie schon früher aus Bequemlichkeit hinzugefügt. Multiplizieren wir nämlich die Gl. (31) mit i, so erhalten wir die Eulersche Differentialgleichung für homogene Funktionen vom Grade $-s$:

$$x^\mu\, \partial_\mu\, f_s(x) = -s\, f_s(x).$$

Eigenlösungen von D sind also alle homogenen Raum-Zeit-Funktionen, von denen wir annehmen, daß sie, mit eventueller Ausnahme singulärer Stellen, überall mindestens einmal differenzierbar sind. Zu den Eigenfunktionen gehören insbesondere die Potenzprodukte

$$B_s(x) = (x^0)^{s_0}\, (x^1)^{s_1}\, (x^2)^{s_2}\, (x^3)^{s_3}, \qquad -s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 . \tag{32}$$

Damit die B_s eindeutige Funktionen ihrer Argumente sind, können die s_μ nur ganzzahlige reelle Werte annehmen. Wären die x^μ immer positiv, so ließe sich die Eindeutigkeit dadurch erzwingen, daß man nur die positiv reellen Wurzeln zuläßt. In diesem Falle könnten die s_μ beliebige reelle Zahlen sein. Da die x^μ aber auch negative Werte annehmen, ist das nicht möglich und dies führt zu der erwähnten Einschränkung der s_μ.

Würde man nur die Eindeutigkeit einer Bilinearform der Eigenfunktionen von D fordern, so könnte man bei geeigneter Vorsicht wohl auch zweideutige B_s, d. h. halbganze s_μ, zulassen. Es besteht für uns jedoch vorerst kein Anlaß, solche Funktionen einzuführen: Man kann sowohl Kugelfunktionen, ebene Wellen als auch die noch abzuleitenden Eigenfunktionen der Operatoren K_μ nach den Funktionen (32), s_μ ganzzahlig, entwickeln. Diese bilden daher schon ein vollständiges System!

Daß die s_μ reell und damit auch hier die Eigenwerte von D rein imaginär sein müssen, sieht man so: x^0 sei negativ. Dann ist $(x^0)^i_i$ definiert durch

$$\begin{aligned}(x^0)^i &= e^{i \log x^0} = e^{i(\log|x^0| + (2k+1)i\pi)}\\ &= e^{-(2k+1)\pi} \cdot e^{i\log|x^0|}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\end{aligned}$$

d. h., man bekommt abzählbar viele verschiedene Potenzreihenentwicklungen für $(x^0)^i$. Die Funktion ist also unendlich vieldeutig und daher auszuschließen!

Als Eigenvektoren von D kann man z. B. die Potenzprodukte B_s nehmen, nach denen man dann eine vorgegebene Raum-Zeit-Funktion in einer vierdimensionalen Laurent-Reihe zu entwickeln hat, falls die betreffende Funktion das zuläßt. Daß man in Laurent-Reihen entwickeln kann, ist eine wesentliche Erweiterung und folgt daraus, daß auch negative s_μ vorkommen.

Analog wie bei den Dilatationen sieht man, daß die K_μ die Gestalt

$$K_\mu = \frac{1}{i}\,(2x_\mu\, x^\nu\, \partial_\nu - x^2\, \partial_\mu), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{33}$$

haben, so daß wir als Eigenwertgleichungen erhalten:

$$\frac{1}{i}\,(2x_\mu\, x^\nu\, \partial_\nu - x^2\, \partial_\mu)\, F_r(x) = r_\mu\, F_r(x). \tag{34}$$

Da die K_μ kommutieren, können wir die Eigenfunktionen $F_r(x)$ so wählen, daß sie gleichzeitig Eigenfunktionen zu allen vier Operatoren K_μ sind. r_μ sind die Eigenwerte, die sich bei der homogenen Lorentz-Gruppe wie Vierervektoren transformieren, von denen wir aber wegen der indefiniten Metrik nicht voraussetzen können, daß sie reell sind.

Gehorcht $F_r(x)$ der Differentialgleichung (34), so auch derjenigen, die man erhält, wenn man (34) mit x^μ multipliziert und über μ summiert:

$$x^2\, x^\nu\, \partial_\nu\, F_r(x) = i\, r \cdot x\, F_r. \tag{35}$$

Diese Differentialgleichung läßt sich leicht lösen. Macht man nämlich den naheliegenden Ansatz:

$$F_r = F_r\left(\frac{r \cdot x}{x^2}\right),$$

so erhält man statt (35):

$$F_r' = -\,i\, F_r,$$

wobei der Strich die Ableitung nach dem Argument $\frac{r \cdot x}{x^2}$ bedeutet. Als Lösungen von (35) bekommen wir daher:

$$F_r(x) = F_r^{(0)}\, e^{-i\frac{r \cdot x}{x^2}}. \tag{36}$$

$F_r^{(0)}$ ist eine zunächst beliebige Konstante, die wir im folgenden $= 1$ setzen.

Man rechnet leicht nach, daß die F_r von (36) auch der Gl. (34) genügen. Daß sie die einzigen mit dieser Eigenschaft sind, sieht man so ein: Ist $\hat{F}_r$ eine zweite Lösung von (34) zum Eigenwert r_μ, so muß auch für sie die Gl. (35) gelten. Daraus folgt, daß

$$G(x) = \log F_r - \log \hat{F}_r$$

der Differentialgleichung

$$x^\mu\, \partial_\mu\, G(x) = 0$$

genügt, d. h. $G(x)$ ist eine homogene Funktion vom Grade Null. Beachtet man dies und die Tatsache, daß sowohl F_r wie $\hat{F}_r$ Lösungen von (34) sind, so folgt

$$\partial_\mu G(x) = 0, \text{ für alle } \mu,$$

F_r und $\hat{F}_r$ können sich also höchstens um eine Konstante unterscheiden. Damit ist unsere Behauptung bewiesen!

Ohne die Differentialgleichung (34) lösen zu müssen, hätten wir die Eigenfunktionen F_r auf anderem Wege wesentlich einfacher bekommen können: Wir haben in I, (13) gesehen, daß die speziellen konformen Transformationen sich schreiben lassen als RTR. Da dies auch für die Lie-Algebra gelten muß, erhält man die Eigenfunktionen von K_μ, indem man R auf die Eigenfunktionen von P_μ anwendet. Dies sind in unserem Fall die Funktionen $e^{ir \cdot x}$. Wenden wir darauf R an, d. h. ersetzen wir die x_μ durch $-\frac{x^\mu}{x^2}$, so bekommen wir genau unsere obigen F_r!

Um auch ein paar Eigenschaften von D und K_μ im Zusammenhang mit einer speziellen Theorie kennenzulernen, gehen wir aus von einem kanonisch quantisiertem Feld $\varphi(x)$, das bezüglich der inhomogenen Lorentz-Gruppe skalar ist. Die Theorie sei außerdem gegenüber Dilatationen und speziellen konformen Transformationen invariant. Beispiele sind

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \partial_\mu \partial^\mu \varphi + g \varphi^3 = 0, \tag{37}$$

wobei g eine dimensionslose Konstante ist. Wie man aus den zugehörigen Lagrange-Dichten entnimmt, hat $\varphi(x)$ die Dimension (L^{-1}), transformiert sich also so:

$$\varphi'(x') = \varrho^{-1} \varphi(x); \quad \varphi'(x') = \sigma(x) \varphi(x). \tag{38}$$

Mittels des kanonischen Formalismus und der Noetherschen Sätze[7]) kann man die Operatoren D und K_μ in den beiden Beispielen in bekannter Weise konstruieren[46]). Uns interessiert hier jedoch nicht so sehr ihre spezielle Gestalt, sondern vor allem ihre Wirkung auf $\varphi(x)$:

$$e^{i\alpha D} \varphi(x) e^{-i\alpha D} = \varphi'(x);$$

$$e^{ic^\mu K_\mu} \varphi(x) e^{-ic^\mu K_\mu} = \varphi'(x).$$

Wenn wir zu infinitesimalen Parametern übergehen und (38) beachten, bekommen wir die Beziehungen

$$i\,[D, \varphi(x)] = -\varphi(x) - x^\mu \partial_\mu \varphi(x) \tag{39a}$$

$$i\,[K_\mu, \varphi(x)] = -2x_\mu \varphi(x) - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu \varphi(x) + x^2 \partial_\mu \varphi(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{39b}$$

Hier stammt jeweils der erste Summand auf der rechten Seite von der Transformation des Feldes her. Ihm entspricht in den Operatoren D bzw. K_μ der Anteil, der von der Feldvariation herrührt. Bezeichnen wir diesen mit D^φ bzw. K_μ^φ, so erhalten wir:

$$i\,[D^\varphi, \varphi(x)] = -\varphi(x) \tag{40a}$$

$$i\,[K_\mu^\varphi, \varphi(x)] = -2x_\mu \varphi(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{40b}$$

D^φ und K_μ^φ sind, im Gegensatz zu D und K_μ, Funktionen der Zeit. Wir wählen diese Zeit im folgenden so, daß sie mit x^0 in $\varphi(x)$ übereinstimmt.

In den Beispielen (37) haben D^{φ} und K_{μ}^{φ} die Gestalt[46]):

$$D^{\varphi} = \int \partial^{\nu}\varphi \cdot \varphi \, d\sigma_{\nu}, \quad K_{\mu}^{\varphi} = \int 2x^{\mu}\, \partial^{\nu}\varphi \cdot \varphi \, d\sigma_{\nu},$$

wobei $d\sigma_{\nu}$ das Element einer raumartigen Fläche bedeutet. Man sieht, daß D^{φ} und K_{μ}^{φ} kommutieren und mittels der kanonischen Vertauschungsrelation

$$[\partial_0\, \varphi(x),\ \varphi(y)]_{x^0=y^0} = i\, \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

erkennt man, daß sie die gewünschten Beziehungen (40a) und (40b) erfüllen.

Die Vertauschbarkeit von D^{φ} und K_{μ}^{φ} zeigt, daß diese nicht die gleichen Eigenschaften haben wie die Operatoren D und K_{μ} selbst — dem entspricht, daß sogar $P_{\mu}^{\varphi} = 0$ ist, da bei Translationen $\delta\varphi = \varphi'(x') - \varphi(x) = 0$ —. Die Abspaltung von D^{φ} und K_{μ}^{φ} ist dennoch eindeutig bestimmt durch die obige Forderung, daß sie der von der Feldvariation herrührende Anteil der Operatoren D bzw. K_{μ} sein sollen. Dieser hat deshalb besondere Bedeutung, weil er für das betreffende Feld kennzeichnend ist!

Wir untersuchen zunächst die Gl. (40a). Dabei schließen wir ähnlich wie in 2: Nehmen wir an, daß ein Zustand $|0\rangle$ existiert, für den

$$D^{\varphi}\,|0\rangle = 0, \quad \varphi(x)\,|0\rangle \neq 0, \tag{41}$$

so folgt:

$$D^{\varphi}\, \varphi(x)\,|0\rangle = i\, \varphi(x)\,|0\rangle. \tag{42}$$

$\varphi(x)\,|0\rangle$ ist also Eigenvektor von D zum Eigenwert i! Daraus sehen wir erneut, daß wir eine indefinite Metrik brauchen, da man sonst zu dem Widerspruch kommt, daß ein hermitescher Operator imaginäre Eigenwerte hat.

Da $\varphi(x)\,|0\rangle$ zu einem imaginären Eigenwert eines g-hermiteschen Operators gehört, muß gelten:

$$\langle 0\,|\,\varphi(x)\,\varphi(x)\,|0\rangle = 0.$$

Weiter ist mit i auch $-i$ Eigenwert von D^{φ} (s. Anhang). Die „1-Teilchenzustände" des skalaren Feldes gehören demnach zu diesem Eigenwertpaar von D^{φ}.

Nun beschreibt aber das masselose skalare Feld offenbar kein realistisches physikalisches Teilchen. Unsere Ableitung gilt jedoch ganz analog auch für das Maxwellsche Feld; man hat lediglich $\varphi(x)$ durch den Vierervektor $a^{\mu}(x)$ zu ersetzen, dessen Komponenten der Gleichung

$$\partial_{\nu}\, \partial^{\nu}\, a^{\mu}(x) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

genügen.

Nehmen wir auf Grund unserer früheren Überlegungen an, daß $2i\, D^{\varphi}$ die Helizität der Photonen beschreibt, so ist unser obiges Ergebnis, daß die 1-Photonenzustände die Helizitäten 2 und -2 haben können. Dies ist wie in 4 in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

In diesem Zusammenhang ist noch etwas anderes wichtig: Die $a^{\mu}(x)$ haben alle die Längendimension (L^{-1}), gehören also zum Eigenwert i von D^{φ}. Die Feldkomponente, die zu $-i$ gehört, und die, da wir eine Metrik voraussetzen, nach den im Anhang bewiesenen Sätzen existieren muß, ist unter den vier üblichen Vektorpotentialen nicht enthalten! Dies bedeutet, daß die $a^{\mu}(x)$ darstellungstheoretisch, und bei unserer Deutung der Dilatationen auch physikalisch, ein unvollständiges System bilden!

Die Unvollständigkeit der vier elektromagnetischen Potentiale ist nicht an die Quantenfeldtheorie gebunden, sie folgt schon klassisch: Aus den gleichen Gründen wie oben haben wir für die klassischen Größen a^μ das Transformationsgesetz

$$a^{\mu\prime} = \varrho^{-1} a^\mu = e^{i\,i\,\alpha} a^\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{43}$$

Dies bedeutet, daß die Potentiale a^μ Eigenvektoren des Dilatationsoperators D in einer Darstellung endlichen Grades sind — die x-Abhängigkeit der a^μ ist hier, wie für ihren Charakter als Vierervektoren, unwesentlich —, und zwar gehören sie nach (43) wie vorhin zum Eigenwert i. Dann muß es, sowohl nach den Ergebnissen von 2 wie des Anhangs, auch den Eigenwert $-i$ geben! Dieser ist aber aus dem System der vier üblichen elektromagnetischen Potentiale nicht zu erhalten. Man muß dieses daher ergänzen! Das geschieht im nächsten Paragraphen.

Entsprechende Überlegungen wie hier für das Maxwellsche Feld gelten natürlich für andere Theorien!

Wir kommen jetzt zur Gl. (40b). Aus ihr folgt, wenn wir zusätzlich zu (41)

$$K_\mu^\varphi \,|0\rangle = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{44}$$

annehmen:

$$K_\mu^\varphi \,\varphi(x)\,|0\rangle = 2i\, x_\mu\, \varphi(x)\,|0\rangle. \tag{45}$$

Die Bedingungen (41) und (44) bedeuten gewisse Einschränkungen an die möglichen Darstellungen der Vertauschungsrelationen (39) bzw. (40), von denen wir in Analogie zur üblichen Quantenfeldtheorie vorausgesetzt haben, daß sie bei geeigneter Vorsicht[68]) erfüllbar sind. Das ist plausibel, da die Existenz eines solchen Vakuumvektors einer indefiniten Metrik, soweit man weiß, nicht widerspricht. Problematisch ist die Anwendung der kanonischen Vertauschungsrelationen, da fraglich ist, ob sie auch in den zu (37) gehörigen Darstellungsräumen mit indefiniter Metrik noch richtig sind. Die obigen Schlüsse sind jedoch unabhängig davon, sie setzen lediglich (39) bzw. (40) voraus.

Da die D^φ und K_μ^φ vertauschen, ist (45) mit (42) verträglich: $\varphi(x)\,|0\rangle$ kann Eigenvektor zu allen fünf Operatoren sein!

Nach (45) ist $\varphi(x)\,|0\rangle$ Eigenvektor von K_μ^φ zum Eigenwert $2i\,x_\mu$! Unsere Vermutung von 1, daß der Imaginärteil der K_μ mit den Ortskoordinaten zusammenhängt, hat sich also bestätigt! Dies Ergebnis ist in verschiedener Hinsicht interessant: Erstens erhält man mittels der konformen Gruppe Ortsoperatoren, was ja bei der Lorentz-Gruppe nicht unmittelbar der Fall ist. Zweitens sind diese Operatoren eine Folge der Variation des Feldes und nicht der Koordinaten, zumindestens nicht unmittelbar! Drittens treten die Koordinaten x^μ als Imaginärteile der Eigenwerte von g-hermiteschen Operatoren auf. Das ist wichtig für das Deutungsproblem; denn es zeigt, daß auch die Imaginärteile solcher Operatoren physikalische Bedeutung haben können und daß man deshalb die zugehörigen Eigenvektoren zum Raum der physikalischen Zustände mit hinzunehmen muß.

Als zweiten wollen wir den Raum $R[\eta]$ der Funktionen $\tilde{f}(\eta^\mu, \varkappa, \lambda)$ mit den in I, 2 eingeführten Argumenten $\eta^\mu, \varkappa, \lambda$ betrachten. Da zwischen diesen die Bindung $\eta^2 = \varkappa\,\lambda$ besteht, setzen wir $\tilde{f}(\eta, \varkappa, \lambda) = f(\eta, \varkappa)$.

[68]) A. S. Wightman u. S. S. Schweber, Physic. Rev. **98**, 812 (1955).

Die Gestalt der Operatoren $M_{\mu\nu}$, P_μ, K_μ und D im Raum der $f(\eta, \varkappa)$ ermittelt man in gleicher Weise wie die von D und K_μ im vorigen Paragraphen, jetzt mit Hilfe der Transformationsformeln Ia—IVa von Kap. I. Man sieht aus IIa, daß die $M_{\mu\nu}$ die Form

$$\frac{1}{i}(\eta_\mu D_\nu - \eta_\nu D_\mu), \qquad D_\mu = \frac{\partial}{\partial \eta^\mu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

haben. Sie besitzen also die gleiche Struktur wie im $R[x]$. Die Ergebnisse dort, z. B. für Kugelfunktionen usw. lassen sich daher ohne weiteres übernehmen. Für P_μ, K_μ und D erhalten wir

$$P_\mu = \frac{1}{i}\varkappa D_\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{46a}$$

$$K_\mu = -\frac{1}{i}(2\eta_\mu D_{(\varkappa)} + \lambda D_\mu), \quad D_{(\varkappa)} = \frac{\partial}{\partial \varkappa}, \tag{46b}$$

$$D_\mu = -\frac{1}{i}\varkappa D_{(\varkappa)}. \tag{46c}$$

Als Eigenfunktionen E_p von P_μ erhält man:

$$E_p = e^{i\frac{1}{\varkappa}p\cdot\eta} = e^{ip\cdot x}. \tag{47}$$

Man kann also die Eigenfunktionen der Räume $R[x]$ und $R[\eta]$ unmittelbar ineinander umrechnen. Setzt man $p_\mu = \varkappa\pi_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, so sind die π_μ dimensionslose Impulse, die man mittels der „Meßlänge" $\varkappa$ in die Maßzahlen p_μ umzurechnen hat. Es ist

$$E_p = E_\pi = e^{i\pi\cdot\eta}.$$

Die Eigenfunktionen F_r von K_μ erhalten wir wie im $R[x]$, indem wir den Operator R auf E_r anwenden:

$$F_r = R E_r = e^{-i\frac{r\cdot\eta}{\lambda}} = e^{-i\varkappa\frac{r\cdot\eta}{\eta^2}} = e^{-i\frac{r\cdot x}{x^2}}. \tag{48}$$

Man rechnet wie früher leicht nach, daß diese F_r genau die Eigenlösungen von K_μ sind.

Um auch hier dimensionslose Größen einzuführen, kann man noch

$$\vartheta_\mu = \varkappa r_\mu, \qquad F_\vartheta = F_r = e^{-i\frac{\vartheta\cdot\eta}{\eta^2}}$$

setzen.

Die Eigenfunktionen g_s von D erhalten wir aus

$$i\varkappa D_{(\varkappa)} g_s = i s g_s. \tag{49}$$

Die Lösungen hiervon sind offenbar

$$g_s = \varkappa^s f(\eta),$$

wobei $f(\eta)$ eine zunächst beliebige Funktion der η^μ ist. Da $\varkappa$ auch negativ sein kann, gelten die gleichen Schlüsse wie im $R[x]$, d. h. s muß ganzzahlig reell sein!

Will man für die Eigenfunktionen von D die gleiche Umrechnungsvorschrift vom $R[x]$ in den $R[\eta]$ wie für die der P_μ und K_μ haben, so hat man $f(\eta)$ so zu spezialisieren, daß

$$f_s = g_s = \varkappa^s f(\eta). \tag{50}$$

Dies ist offenbar immer möglich, da $f(\eta)$ beliebig war. Durch die Festsetzung (50) wird wegen (47), (48) und der Bemerkungen über die $M_{\mu\nu}$ die Mannigfaltigkeit der Funktionen, die zu der Darstellung der konformen Gruppe im $R[\eta]$ gehören, gleich derjenigen im $R[x]$. Wann diese Einschränkung angebracht ist, hängt von der betreffenden dynamischen Theorie ab.

Für die B_s von (32) hat man in (50)

$$f(\eta) = (\eta^0)^{s_0} (\eta^1)^{s_1} (\eta^2)^{s_2} (\eta^3)^{s_3}, \qquad -s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3,$$

zu setzen.

Wir finden hier unseren Satz von 3 über die Unvollständigkeit der Eigenfunktionen E_p und F_r bestätigt: Die F_r oszillieren stark in der Umgebung des Lichtkegels und werden auf dem Lichtkegel selbst wesentlich singulär. Solche wesentlich singulären Funktionen sind aber auch im Rahmen der Distributionstheorie nicht zu regularisieren[69]) und durch ein Fourier-Integral darzustellen, was der Fall sein müßte, wenn die ebenen Wellen ein vollständiges System bilden würden. Wir erfahren also eine Erweiterung des in der Quantenfeldtheorie üblichen Funktionenraumes durch Funktionen, die u. a. auf dem Lichtkegel wesentlich singulär sind.

Dies entspricht dem Ergebnis bei den Dilatationen, nach dem Funktionen zugelassen sind, die sich in einer Laurent-Reihe entwickeln lassen. Offenbar kann man sowohl die E_p wie die F_r in einer solchen Reihe entwickeln und es ist anzunehmen, daß, wie bei den Darstellungen endlichen Grades, die Eigenfunktionen von D ein vollständiges System bilden und ebenso die E_p und F_r zusammengenommen. Streng beweisen läßt sich das nur im Zusammenhang mit einer dynamischen Theorie, aus der man auch das dazugehörige Skalarprodukt ableitet.

6. Zur Umrechnung von Größen und Gleichungen vom Raum der Argumente x^μ zu dem der η^μ, $\varkappa$, λ

Zum Schluß sei am Beispiel des Maxwellschen Feldes noch angegeben, wie man physikalische Größen und Gleichungen so vom $R[x]$ in den $R[\eta]$ umrechnet, daß die Konform-Invarianz unmittelbar in Erscheinung tritt. Das Verfahren findet sich in ähnlicher Form auch bei Dirac[17]) und geht zurück auf Darboux[70]), der es in der Potentialtheorie anwandte. Eine knappe klare Darstellung der Methode steht bei F. Pockels[71]).

Die zum Maxwellschen Feld gehörenden elektromagnetischen Potentiale $a^\mu(x)$ mögen erstens den Gleichungen

$$\partial_\nu \partial^\nu a^\mu(x) = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{51}$$

genügen. Da die $a^\mu(x)$ sich bei Dilatationen wie $\varkappa$ transformieren, setzen wir

$$a^\mu(x) = a^\mu\left(\frac{\eta}{\varkappa}\right) = \varkappa\, A^\mu(\eta), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{52}$$

Wegen (50) bedeutet dies, daß wir die $a^\mu(x)$ als homogene Funktionen ansehen. Das ist nur deshalb möglich, weil sie Eigenfunktionen von P_B^2 zum Eigenwert

---

[69]) I. M. Gelfand u. G. E. Schilow, Verallgemeinerte Funktionen. Berlin 1960, Kap. I, 2, Nr. 6, Beisp. 2.

[70]) Darboux, C. R. Acad. Sci. Paris **83** (2), 1037 u. 1099 (1876).

[71]) F. Pockels, Über die part. Diffglg. $\Delta u + k^2 u = 0$ u. deren Auftreten in der Math. Physik, Leipzig 1891, S. 195ff.

Null sind. Man entnimmt nämlich aus der Vertauschungsrelation

$$i\,[D_B, P_B^2] = -2\,P_B^2, \qquad D_B = \frac{1}{i}\,x^\nu\,\partial_\nu, \qquad P_B^2 = -\partial_\nu\,\partial^\nu,$$

daß in diesem Spezialfall die $a^\mu(x)$ gleichzeitig Eigenfunktionen von D_B sein können — der Index „B" soll angeben, daß es sich um den „Bahnanteil" der betreffenden Operatoren handelt —. Im allgemeinen, z. B. bei Wechselwirkungen, wenn die a^μ nicht mehr zum Eigenwert Null von P_B^2 gehören, hat man $A^\mu(\eta)$ in (52) durch $A^\mu(\eta, \varkappa)$ zu ersetzen!

Aus (46a), (51) und (52) folgt, daß die A^μ den Gleichungen

$$D_\nu\,D^\nu\,A^\mu = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{53}$$

genügen. Da die A^μ nicht von λ abhängen, gilt

$$D_{(\varkappa)}\,D_{(\lambda)}\,A^\mu = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

und damit

$$(D_\nu\,D^\nu - D_{(\varkappa)}\,D_{(\lambda)})\,A^\mu = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{54a}$$

Dies wird ein konforminvariantes Gleichungssystem, wenn wir noch die beiden Komponenten $A_{(\varkappa)}$ und $A_{(\lambda)}$ einführen, die ebenfalls den Gleichungen

$$\begin{aligned}(D_\nu\,D^\nu - D_{(\varkappa)}\,D_{(\lambda)})\,A_{(\varkappa)} &= 0\\ (D_\nu\,D^\nu - D_{(\varkappa)}\,D_{(\lambda)})\,A_{(\lambda)} &= 0\end{aligned} \tag{54b}$$

gehorchen sollen.

Man sieht folgendes: Solange man die speziellen konformen Transformationen beiseite läßt, kann man (54a) durch (53) ersetzen und hat dann zunächst die üblichen Gleichungen für die vier Potentiale A^μ. Dazu kommen aber noch die entsprechenden Gleichungen für $A_{(\varkappa)}$ und $A_{(\lambda)}$, auf die man nicht verzichten kann, da die A^μ bzw. $a^\mu(x)$ allein, wie wir gesehen haben, mathematisch ein unvollständiges System bilden. Man sieht dies auch daran, daß die Translationen die Komponenten A^μ, $A_{(\varkappa)}$ und $A_{(\lambda)}$ mischen; für sie gilt nämlich wegen der Gleichungen Ia von I:

$$\begin{aligned}A^{\mu\prime} &= A^\mu + b^\mu\,A_{(\varkappa)}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,\\ A'_{(\varkappa)} &= A_{(\varkappa)},\\ A'_{(\lambda)} &= 2 b_\nu\,A^\nu + b^2\,A_{(\varkappa)} + A_{(\lambda)}.\end{aligned}$$

(Wir haben die Parameter hier b^μ genannt, um Verwechslungen mit den Potentialen a^μ zu vermeiden.)

Wegen $\eta^{\mu\prime} = \eta^\mu + b^\mu\,\varkappa$ ist der Differentialoperator von (53) zunächst nicht translationsinvariant. Man kann die Invarianz jedoch dadurch retten, daß man an Stelle der b^μ die dimensionslosen $\bar{b}^\mu = \varkappa\,b^\mu$ einführt[44]). Dann hängen A^μ und $A_{(\lambda)}$ zwar explizit von $\varkappa$ ab; das macht aber nichts aus, da in (53) keine Ableitungen nach $\varkappa$ auftreten und jetzt $D'_\nu = D_\nu$.

Man sieht ohne weiteres, daß die obigen Überlegungen auch dann gelten, wenn die sechs A Funktionen von $\varkappa$ sind, da wir von der Art der $\varkappa$-Abhängigkeit keinen Gebrauch gemacht haben.

Zweitens betrachten wir die Lorentz-Konvention

$$\partial^\nu\,a_\nu(x) = 0, \tag{55}$$

die wir analog zu (51) zu

$$D_\nu\,A^\nu = 0 \tag{56}$$

umschreiben. Die konforminvariante Verallgemeinerung hiervon ist offenbar:

$$D_\nu A^\nu - \frac{1}{2}(D_{(\varkappa)} A_{(\lambda)} + D_{(\lambda)} A_{(\varkappa)}) = 0. \tag{57}$$

Die Gln. (54) und (57) sind invariant gegenüber der Eichtransformation

$$A^\mu \to A^\mu + D^\mu f, \quad A_{(\varkappa)} \to A_{(\varkappa)} + D_{(\varkappa)} f, \quad A_{(\lambda)} \to A_{(\lambda)} + D_{(\lambda)} f,$$
$$(D_\nu D^\nu - D_{(\varkappa)} D_{(\lambda)}) f = 0.$$

Wählt man f so, daß

$$D_{(\varkappa)}(A_{(\lambda)} + D_{(\lambda)} f) + D_{(\lambda)}(A_{(\varkappa)} + D_{(\varkappa)} f) = 0$$

— dies ist eine lösbare inhomogene Differentialgleichung für f —, so hat man für die neuen Potentiale $A^{\mu\prime}$ wieder die alte Lorentz-Bedingung (56).

Nun sind die ebenen Wellen $A^\mu = e^\mu \cdot e^{i\pi\cdot\eta}$, e^μ konstant, Lösungen von (54) bzw. (52). Eingesetzt in (56) ergibt das

$$\pi_\nu e^\nu = 0.$$

Hieraus schließt man wie üblich, daß nur der zum räumlichen Impuls $\vec{\pi}$ senkrechte Anteil der A^ν eine eichinvariante Bedeutung hat und daß daher der Spin des Photons nur in Richtung der Bahn oder entgegengesetzt dazu liegen kann. Die Helizität Null ist für freie Photonen also verboten.

Da die A^μ, $A_{(\varkappa)}$ und $A_{(\lambda)}$ den Differentialen $d\eta^\mu$, $d\varkappa$ und $d\lambda$ entsprechen und zwischen diesen die Bindung

$$\eta_\mu d\eta^\mu - \frac{1}{2}(\lambda\, d\varkappa + \varkappa\, d\lambda) = 0$$

besteht, verlangen wir schließlich noch:

$$\eta_\mu A^\mu - \frac{1}{2}(\lambda A_{(\varkappa)} + \varkappa A_{(\lambda)}) = 0. \tag{58}$$

Die Gln. (54), (57) und (58) sind genau die von Dirac[17]) aufgestellten Gleichungen für das elektromagnetische Feld im konformen Raum.

Anhang

Vektorräume mit indefiniter Metrik

Im folgenden sollen die wichtigsten Definitionen und Sätze für einen Vektorraum mit indefiniter Metrik, die in II oft benutzt wurden, kurz zusammengestellt werden. Eine ausführlichere Darstellung mit vielen Beispielen findet man z. B. bei K. L. Nagy[72]), wo auch die gesamte Literatur, die von diesem Gebiet handelt, angegeben ist. Uns geht es hier vor allem um zwei Sätze, die bei Nagy nicht stehen. Wir werden uns dabei auf Räume endlicher Dimension beschränken. Die Definitionen gelten, sofern sie dann noch sinnvoll sind, auch für abzählbare Dimensionen; von den Sätzen ist das nicht immer bewiesen, jedoch zeigt die Erfahrung, daß man bei den meisten auch dort mit einer gewissen Berechtigung ihre Richtigkeit erwarten kann. Dabei ist natürlich klar, daß eine solche Schlußfolgerung mathematisch unzulässig ist.

---

[72]) K. L. Nagy, Suppl. Nuovo Cimento **17**, 92 (1960).

Es sei $\mathfrak{C}_n$ ein n-dimensionaler komplexer linearer Vektorraum mit der Basis $\{e_\nu\}$, $\nu = 1, \ldots, n$ und ein Vektor x habe die Darstellung

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \tag{1}$$

wobei die x_ν komplexe Zahlen sind. Bei fester Basis schreiben wir dafür auch die Spaltenmatrix

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

x^* bedeutet Übergang zum Vektor mit den zu x_ν konjugiert-komplexen Zahlen als Komponenten und x^T den transponierten Vektor. Schließlich setzen wir noch $x^+ = x^{*T}$. Diese Definitionen sollen für beliebige Matrizen gelten.

In $\mathfrak{C}_n$ sei ferner eine Metrik durch folgende Bilinearform gegeben:

$$\langle x|y\rangle = x^+ g\, y; \quad |y\rangle = y, \quad \langle x| = x^+ g. \tag{2}$$

Hierbei ist g der sogenannte metrische Operator, für den

$$g^+ = g \quad \text{und} \quad g \cdot g = 1$$

gelten soll. g ist also hermitesch und unitär im üblichen Sinne. Ein einfaches Beispiel ist, daß g nur Diagonalelemente hat, und zwar p-mal eine 1 und $(n-p)$-mal eine -1:

$$\langle x|y\rangle = x_1^* y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1}^* y_{p+1} - \cdots - x_n^* y_n.$$

Man sieht unmittelbar, daß $\langle x|x\rangle$ nicht mehr positiv zu sein braucht.

Wir nennen die Metrik nichtentartet, wenn $\det(g) \neq 0$. Im Falle der entarteten Metrik gibt es Vektoren $y \neq 0$, so daß $\langle x|y\rangle = 0$ für alle x aus $\mathfrak{C}_n$. Solche Fälle schließen wir im folgenden aus.

Wir betrachten nun Abbildungen A des $\mathfrak{C}_n$ in sich. Dabei sollen die Basis und g festbleiben.

Definition: $\hat{A}$ heißt g-hermitesch adjungiert zu A, wenn für alle x und y aus $\mathfrak{C}_n$ gilt:

$$x^+ g\, A\, y = (\hat{A}\, x)^+ g\, y = x^+ \hat{A}^+ g\, y.$$

Hieraus folgt:

$$\hat{A} = g\, A^+ g. \tag{3}$$

Wir nennen U g-unitär, wenn $\hat{U} = U^{-1}$ und A g-hermitesch, wenn $\hat{A} = A$. Diese Definitionen sind offensichtlich Verallgemeinerungen derjenigen von unitären und hermiteschen Operatoren bei Räumen mit positiv definiter Metrik und gehen für $g = 1$ in diese über.

Man wird erwarten, daß bei der physikalischen Interpretation den meßbaren Größen g-hermitesche Operatoren entsprechen. Jedoch ist das hier nicht mehr so zwangsläufig, da, wie wir sehen werden, diese keine reellen Eigenwerte mehr zu haben brauchen.

Wir untersuchen zunächst die g-unitären Operatoren U. Für sie gilt, wenn $|x\rangle' = U\,|x\rangle$,

$$\langle x|y\rangle' = (U\, x)^+ g\, U\, y = x^+ U^+ g\, U\, y = x^+ g\, \hat{U}\, U\, y = x^+ g\, y = \langle x|y\rangle. \tag{4}$$

Die g-unitären Abbildungen U lassen also das Skalarprodukt invariant!

Ist $|u\rangle$ Eigenvektor von U zum Eigenwert u, so folgt wegen (4):

$$u^* u \langle u|u\rangle = \langle u|u\rangle, \tag{5}$$

d. h. $u^* u = 1$, wenn $\langle u|u\rangle \neq 0$.

Ist $u^* u \neq 1$, so muß $\langle u|u\rangle = 0$ sein. Wegen der indefiniten Metrik können solche Fälle auftreten.

Es sei nun

$$U|u_1\rangle = u_1|u_1\rangle, \quad U|u_2\rangle = u_2|u_2\rangle.$$

Daraus folgt:

$$\langle u_1|u_2\rangle = u_1^* u_2 \langle u_1|u_2\rangle, \tag{6}$$

also ist entweder $u_1^* u_2 = 1$ oder $\langle u_1|u_2\rangle = 0$. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $u_1^* u_1 = 1$,

d. h. $u_1^* = u_1^{-1}$ und dies hat wegen (6) zur Folge, daß entweder $u_2 = u_1$ oder $\langle u_1|u_2\rangle = 0$:

Ein Eigenvektor von U, der zu einem Eigenwert vom Betrage 1 gehört, ist also zu allen Eigenvektoren orthogonal, die nicht zum selben Eigenwert gehören!

b) $u_1^* u_1 \neq 1$

Dann folgt aus (6), daß entweder $\langle u_1|u_2\rangle = 0$ oder $u_1^* u_2 = 1$. Daß dieser letzte Fall eintreten kann, zeigt der folgende Satz:

Satz: Ist $u \neq 0$, $u u^* \neq 1$, Eigenwert des g-unitären Operators U, so auch u^{*-1}.

Beweis: Es ist $U^{-1} = g U^+ g$, d. h.

$$g U^+ g(U - u \cdot 1) = 1 - u g U^+ g = (-u) g(U^+ - u^{-1} \cdot 1) g.$$

Bilden wir von der linken und rechten Seite jeweils die Determinante, so erhalten wir wegen $(\det g)^2 = 1$:

$$\det U^+ \cdot \det(U - u \cdot 1) = (-u)^n \det(U^+ - u^{-1} \cdot 1).$$

Da nun

$$\det U^+ \neq 0, \ \det(U^+ - u^{-1} \cdot 1) = \det(U^* - u^{-1} \cdot 1),$$

folgt aus

$$\det(U - u \cdot 1) = 0 : \det(U - u^{*-1} \cdot 1) = 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Als zweiten untersuchen wir den g-hermiteschen Operator $\hat{A} = A$ etwas näher. Da die Beweise der meisten Sätze analog zu denen von U laufen, brauchen wir sie nur anzudeuten.

Ist $|a\rangle$ Eigenvektor von A zum Eigenwert a, so folgt:

$$(a - a^*) \langle a|a\rangle = 0. \tag{7}$$

Das heißt: a ist reell, wenn $\langle a|a\rangle \neq 0$. Dieser Fall braucht jedoch nicht einzutreten. Ist a nicht reell, so ist notwendig $\langle a|a\rangle = 0$.

Sind a_1 und a_2 zwei verschiedene Eigenwerte von A, so gilt:

$$(a_1^* - a_2) \langle a_1|a_2\rangle = 0, \tag{8}$$

d. h. entweder ist $a_1 = a_2^*$ oder $\langle a_1|a_2\rangle = 0$. Der erste Fall ist möglich wegen des folgenden Satzes:

Satz: Ist a, $a^* \neq a$, Eigenwert des g-hermiteschen Operators A, so auch a^*.

Beweis: Aus $A = g\,A^+ g$ folgt $A - a \cdot 1 = g(A^+ - a \cdot 1)\, g$ und daraus

$$\det(A - a \cdot 1) = \det(A^* - a \cdot 1),$$

d. h. $\det(A - a \cdot 1) = 0$ hat $\det(A - a^* \cdot 1) = 0$

zur Folge. q. e. d.

Aus der Theorie der Matrizen weiß man, daß das Eigenvektorsystem eines g-hermiteschen Operators nicht vollständig zu sein braucht[72]). Wir haben selbst in II solche Beispiele kennengelernt. Ist es aber vollständig, so muß $\langle a^* | a \rangle \neq 0$ sein; denn da wir eine nichtentartete Metrik vorausgesetzt haben, wäre $|a\rangle$ sonst zu allen Vektoren von $\mathfrak{C}_n$ orthogonal, weil $|a\rangle$ zu allen übrigen $|a'\rangle$, $a' \neq a^*$, orthogonal ist, was einen Widerspruch darstellt. Dies ist wichtig für die Formulierung der Vollständigkeitsrelation:

Ist $|a\rangle$ Eigenvektor von A zu reellem a, so können wir $|a\rangle$ so normieren, daß

$$\langle a | a \rangle = N_a = \begin{cases} +1 \\ -1. \end{cases}$$

Projektionsoperator auf $|a\rangle$ ist dann

$$P_a = |a\rangle\, N_a \,\langle a|.$$

Ist a nicht reell, so kann man wegen $\langle a^* | a \rangle \neq 0$ als Projektionsoperator auf $|a\rangle$

$$P_a = \frac{|a\rangle \langle a^*|}{\langle a^* | a \rangle}$$

wählen. Entsprechendes gilt für $|a^*\rangle$. So erhalten wir schließlich die Vollständigkeitsrelation

$$1 = \sum \left(|a\rangle\, N_a \,\langle a| + \frac{|a\rangle \langle a^*|}{\langle a^* | a \rangle} + \frac{|a^*\rangle \langle a|}{\langle a | a^* \rangle} \right). \tag{9}$$

Summiert wird über alle Eigenvektoren!

Herrn Professor Bopp, von dessen Arbeiten über die konforme Gruppe die Anregung zu den vorstehenden Untersuchungen ausging, danke ich herzlich für zahlreiche Diskussionen und kritische Bemerkungen. Herrn Dipl.-Phys. Max Rinke danke ich ebenfalls für viele Diskussionen.

München, Institut für Theoretische Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 12. April 1962.

Verantwortlich
für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Berlin-Adlershof, Rudower Chaussee 126; für den Anzeigenteil: DEWAG-Werbung Leipzig, Leipzig C 1, Friedrich-Ebert-Str. 110, Ruf 7851. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste 4.
Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 27681, 27682. ZLN 5066
Printed in Germany Druck: Paul Dünnhaupt, Köthen (IV/5/1) L 168/62