

TEILCHENPHYSIK FÜR FORTGESCHRITTENE Quantenelektrodynamik und Renormierung

**Caren Hagner
Achim Geiser**



(in Anlehnung an Skript von R. Klanner/T. Schöner-Sadenius)

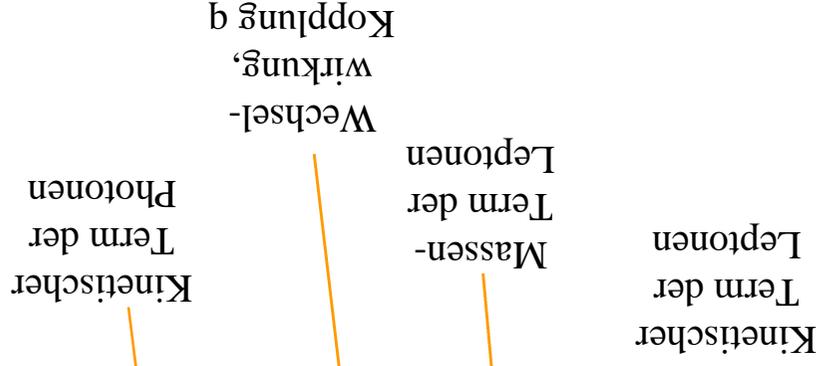
Universität Hamburg, IExpPh
Sommersemester 2007

1. Die quantenmechanische Beschreibung von Elektronen
2. Feynman-Regeln und –Diagramme
3. Lagrange-Formalismus und Eichprinzip
4. QED (15.5. + 18.5.)
 - 4.1 Volle Lagrange-Dichte der QED
 - 4.2 Höhere Ordnungen und Renormierung
 - 4.3 Experimentell: Lamb-Shift, $g-2$

4.1 DIE LAGRANGE-DICHTE DER QED

Die vollständige Lagrange-Dichte der QED (Elektron, Positron, Photon) lautet:

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$



Dieser Ausdruck ist invariant unter lokalen $U(1)$ -Eichtransformationen (die Phasentransformationen $\exp(iq\alpha)$ bilden die unitäre abelsche Gruppe $U(1)$).

$$U(a_1)U(a_2) = U(a_2)U(a_1)$$

Noch mal: Nach dem Noether-Theorem impliziert diese Invarianz die Erhaltung eines Stromes, und zwar des Stromes, dessen Ladung q ist!

4.2 HÖHERE ORDNUNGEN UND RENORMIERUNG

Dielektrische Medium \rightarrow Ladung polarisiert: Bei kleineren Abständen mehr von zentraler Ladung sichtbar.

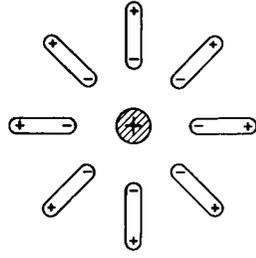


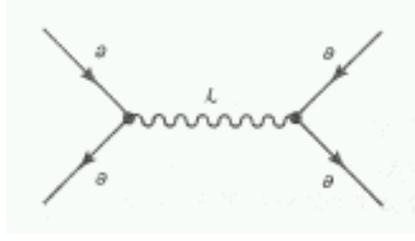
Figure 8.29

Konzept der "laufenden" Kopplung ist einleuchtend. Aber wie quantifizieren?

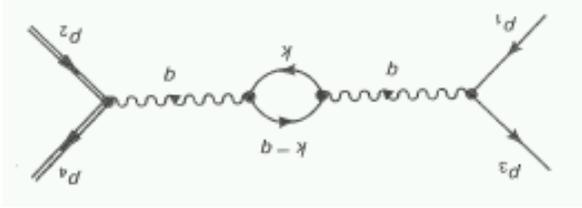
Wir nehmen als Beispiel die Elektron-Myon-Streuung:

Bekannt ist die niedrigste Ordnung:

$$M = -e^2 \int \frac{b}{2} \bar{u}(d) \gamma^\nu u(d) \left[\frac{b}{2} \bar{\nu}(n) \gamma^\nu \nu(n) \right] \frac{b}{2} \bar{u}(d^2) \gamma^\nu u(d^2)$$



Aus der Diskussion der Feynman-Regeln leiten wir die Formel der nächsten Ordnung ab ("Vakuum-polarisation"):



$$M = -ie^4 \bar{u}(d^3) \gamma^\nu u(d^1) \left[\int \frac{b}{2} \bar{u}(d^4) \gamma^\nu u(d^2) \right] \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Sp(\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{q} - \not{k} + m))}{(k^2 - m^2)(q - k)^2 - m^2} \right) \cdot \bar{u}(d^4) \gamma^\nu u(d^2)$$

Effektiv: Modifikation des Propagator-Terms der niedrigsten Ordnung:

$$\frac{g_{\mu\nu}}{2} \frac{b}{2} \leftarrow \frac{g_{\mu\nu}}{2} - \frac{b}{i} I^{\mu\nu} \quad I^{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Sp(\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{q} - \not{k} + m))}{(k^2 - m^2)(q - k)^2 - m^2}$$

Problem: Das Integral divergiert (effektiv nur logarithmisch, nicht wie $k^3 dk^2/k^4 \sim k^2$, wie man erwarten würde)!

4.2 HÖHERE ORDNUMGEN UND RENORMIERUNG

Da steckt aber immer noch eine "Unendlichkeit" drin ... was tun damit? Idee: Wir saugen sie in der "renormierten" (besser: "reparametrisierten") Ladung e_R auf (e ist die "nackte" Ladung):

$$e_R \equiv e \sqrt{1 - \frac{12\pi^2}{M^2} \ln \frac{m}{m_2}}$$

(streng genommen, für Gültigkeit der Herleitung: M groß, aber endlich)

Damit wird die Amplitude zu:

$$M = -e^2 \left[\frac{b}{8\pi^2} \left[\underline{n}(d^1) \gamma_{\mu\nu} n(d^1) \right] + \frac{12\pi^2}{e^2} f(q^2) \right] \left[\underline{n}(d^4) \gamma_{\mu\nu} n(d^2) \right]$$

- Zu beachten:
- Die letzte Gleichung ist nur korrekt bis Ordnung e^4 – man kann also in der Klammer auch e verwenden.
 - Es gibt keine "Unendlichkeiten" mehr – es tritt kein M in der Formel auf. Die Verwendung von e_R macht Sinn – schliesslich ist e_R die Messgröße!
 - Der endliche Term $f(q^2)$ hängt von q^2 ab! Diese Abhängigkeit kann in die Kopplung absorbiert werden (\Leftarrow).

$$M = -e^2 \left[\frac{b}{8\pi^2} \left[\underline{n}(d^1) \gamma_{\mu\nu} n(d^1) \right] + \frac{12\pi^2}{e^2} \ln \frac{m}{m_2} f(q^2) \right] \left[\underline{n}(d^4) \gamma_{\mu\nu} n(d^2) \right]$$

... und die Amplitude der Elektron-Myon-Streuung einschliesslich der ersten Korrektur wird:

$$I(q^2) = \frac{12\pi^2}{e^2} \ln \frac{m}{m_2} f(q^2) = \frac{12\pi^2}{e^2} \ln \frac{m}{m_2} + \frac{60\pi^2}{M^2} \ln \frac{m}{m_2} + \frac{12\pi^2}{e^2} \ln \frac{m}{m_2} \ln \frac{m}{m_2}$$

Damit folgt (kleine/grosse q^2 , $q^2 = -Q^2$):

$$\int_{M^2}^{\infty} \frac{dx}{x} \leftarrow \int_{M^2}^{m_2^2} \frac{dx}{x} = \ln \frac{m_2^2}{M^2}$$

aber siehe Übung):

Um mit der Divergenz umzugehen, wird Cutoff M eingeführt (wird am Ende nach " ∞ " geschickt,

$$I^{\mu\nu} = -i g^{\mu\nu} I(q^2) = -i g^{\mu\nu} \frac{12\pi^2}{e^2} \left[\int_{M^2}^{\infty} \frac{dx}{x} - 6 \int_1^0 z(1-z) \ln \left(1 - \frac{m^2}{q^2} z(1-z) \right) dz \right]$$

Man kann zeigen: Divergiert! Endlich, $f(q^2)$!

4.2 HÖHERE ORDNUMGEN UND RENORMIERUNG

Man kann definieren:

$$e^R(q^2) \equiv e^R(0) \sqrt{1 - \frac{e^2(0)}{12\pi^2} f(q^2)}$$

$$\alpha(q^2) = \alpha(0) \left(1 - \frac{3\pi}{\alpha(0)} f(q^2) \right)$$

Hier ist α die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/4\pi$. Man

spricht von der laufenden Kopplungskonstante – was natürlich ein Widerspruch in sich ist :-) ...

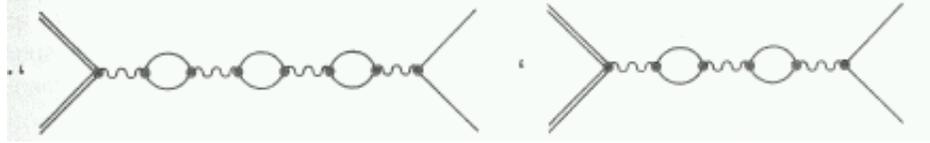
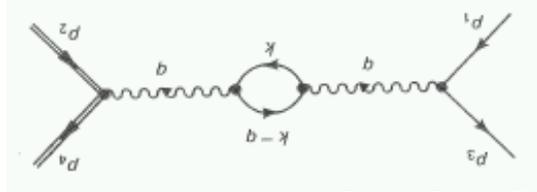
Warum wurde dieser Effekt nicht von Coulomb,

Millikan, Rutherford beobachtet? Er ist sehr klein:

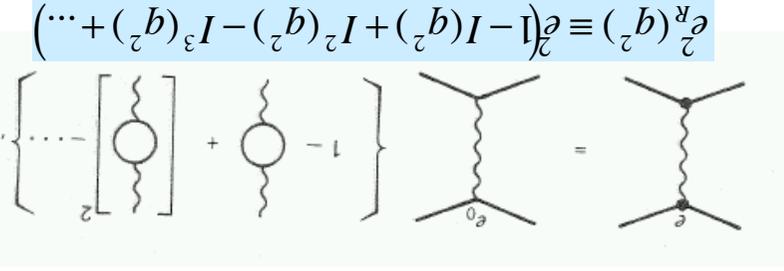
$$\alpha(0) = 1/137, \alpha(100 \text{ GeV}) = 1/128.$$

und beginnt erst bei $Q^2 > m_e^2$

Aber das Spiel geht ja noch weiter:

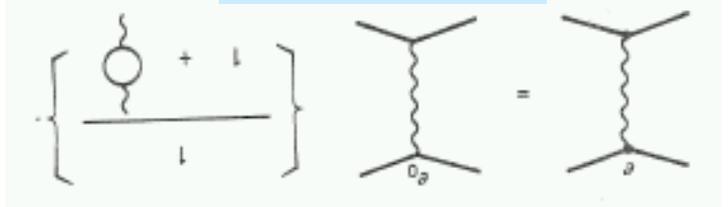


Jeder Loop liefert ein Integral $I(q^2)$ – man kann schematisch schreiben:



$$e^2(q^2) \equiv e^2(1 - I(q^2) + I^2(q^2) - I^3(q^2) + \dots)$$

(Beachte, dass rechts die nackte Ladung steht!) Auswerten der geometrischen Reihe:



$$e^2(q^2) \equiv e^2 \frac{1 + I(q^2)}{1}$$

Im Limes grosser q^2 :

$$I(q^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{-q^2}{M^2} = \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{-q^2}{M^2} = \frac{3\pi}{\alpha} \ln \frac{-q^2}{M^2}$$

$$\alpha(q^2) \equiv \alpha_0 \frac{1 + I(q^2)}{1} = \frac{\alpha_0 \left(1 - \frac{3\pi}{\alpha_0} \ln \frac{-q^2}{M^2} \right)}{\alpha_0}$$

Jetzt stört nur noch die Abhängigkeit von M .

4.2 HÖHERE ORDNUMGEN UND RENORMIERUNG

Idee: Berechne Kopplung an einer Referenzskala (zum Beispiel einer bestimmten Masse μ) und bilde die Differenz. Ergebnis:

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{\alpha(\mu^2)} = \frac{1 - \frac{3\pi}{\alpha(\mu^2)} \ln \left(\frac{\mu^2}{-q^2} \right)}{\alpha(\mu^2)} = \frac{1 - \frac{3\pi}{\alpha(\mu^2)} \ln \left(\frac{\mu^2}{\tilde{Q}^2} \right)}{\alpha(\mu^2)}$$

Dieses Ergebnis ist exakt auf 1-Loop-Niveau. Die laufende Kopplung beschreibt, wie die effektive Ladung vom Abstand zweier Ladungen abhängt.

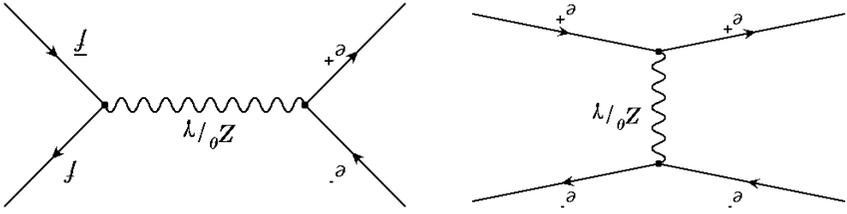
Das Ergebnis ist wie naiv erwartet (charge screening):

kleiner Abstand \rightarrow grosses $Q^2 \rightarrow \alpha$ steigt.
 grosser Abstand \rightarrow kleines $Q^2 \rightarrow \alpha$ sinkt.

Man sieht an der Formel, dass der Verlauf der

Kopplung mit der Energie (q^2) festliegt (Renormierungsgruppengleichung!), dass aber die Normierung experimentell bestimmt werden muss!

Messung der laufenden Kopplung z.B. bei LEP in Bhabha-Streuung:



$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_{(0)}}{dt} \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha_0} \right)^2 (1 + \epsilon)(1 + \delta_\gamma) + \delta_Z$$

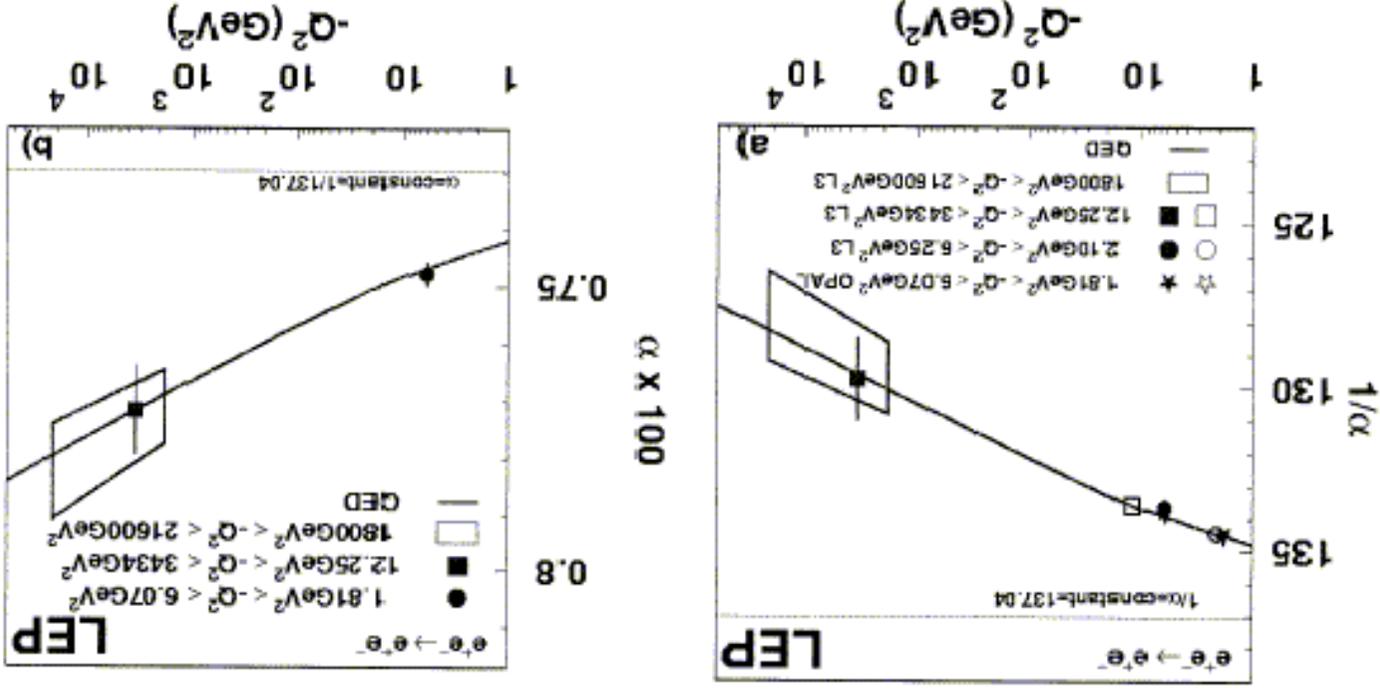
Born
 Koppelung bei t ,
 Feinstrukturkonst.
 γ/Z -s-Kanal
 Strahlung

Ausnutzung von Klein-Winkel-Kalorimetern (SiW in OPAL). Da absolute Bestimmung der Kopplung unabhängigige Messung der Lumi bräuchte, kann man nur Variation der Kopplung mit t – also mit dem Streuwinkel – messen.

4.2 HÖHERE ORDNUNGEN UND RENORMIERUNG

QED: Laufende Kopplung $\alpha_{\text{elm}}(Q^2)$

Gemessen in Bhabha Streuung bei LEP: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



4.2 HÖHERE ORDNUMGEN UND RENORMIERUNG

Verschiedene Korrekturen tragen bei zur Berechnung der laufenden Kopplungskonstante:

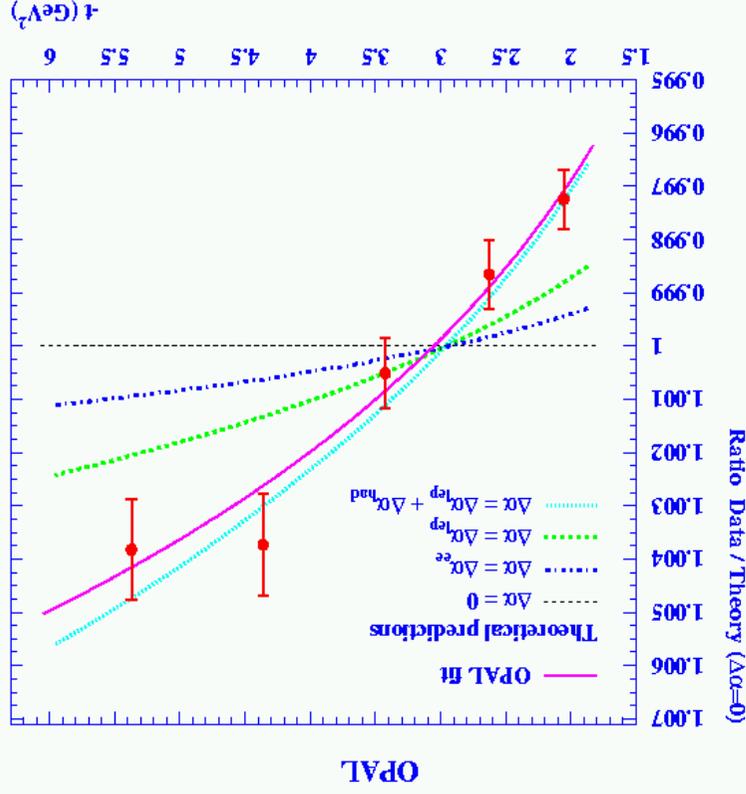
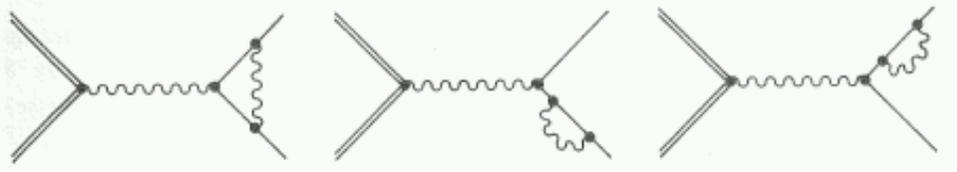


Figure 12: $|f|$ spectrum normalized to the BHLUMI theoretical prediction for a fixed coupling ($\Delta\alpha = 0$). The points show the combined OPAL data with statistical error bars. The solid line is our fit. The horizontal line (Ratio=1) is the prediction if α were fixed. The dot-dashed curve is the prediction of running α determined by vacuum polarization with only virtual e^+e^- pairs, the dashed curve includes all charged lepton pairs and the dotted curve the full Standard Model prediction, with both lepton and quark pairs.

4.2 HÖHERE ORDNUNGEN UND RENORMIERUNG

Es gibt aber noch weitere Korrekturen, z.B.:

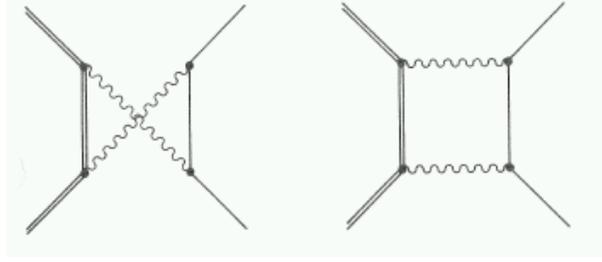


Mithilfe der Ward-Identität kann man zeigen, dass sich die Effekte dieser Diagramme auf die Kopplung herauskürzen (und zwar Ordnung per Ordnung in der Störungstheorie).

Aber: Die Diagramme haben Einfluss auf die

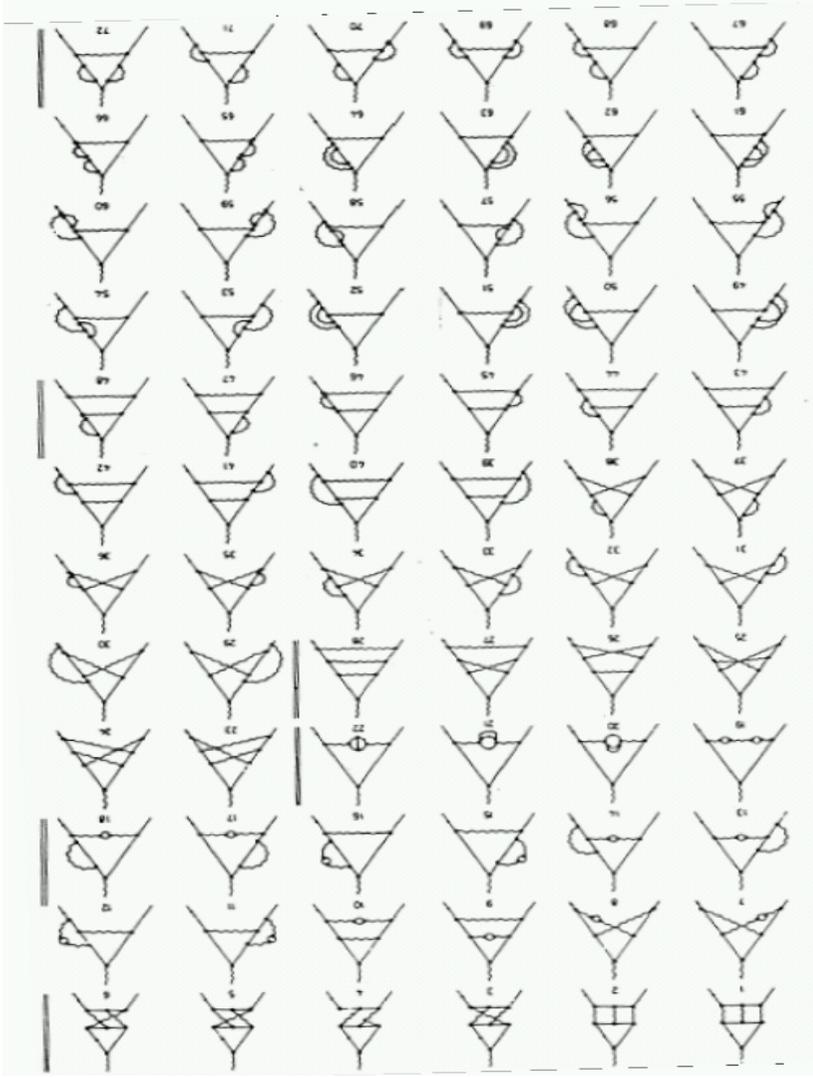
Masse des Elektrons (wird auch renormiert) und auf das magnetische Moment.

Diagramme wie ...



... haben endliche Ergebnisse ...

Mit der Ordnung steigt die Anzahl der zu berechnenden Diagramme drastisch an. Das sind Beiträge zur Ordnung α^3 :



4.3 "g-2"

Erinnerung an Pauli-Gleichung (Limes der Dirac-Gleichung im EM-Feld):

$$i\hbar\phi = \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})^2 + \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - e\Phi \right] \phi$$

Allgemein gilt:

$$\vec{\mu} = g \cdot \mu_B \cdot \vec{S}$$

Lande-Faktor
Bohr'sches Magneton
Spin

Mit der potentiellen Energie $E^{pot} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ kann man sehen, dass das Elektron den Lande-Faktor $g=2$ haben sollte:

$$\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} = -2 \mu_B \vec{S}$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \text{ und } \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

Also Vorhersage Dirac:
Experiment:

$$g = 2$$

$$g_e \approx 2$$

$$g^{\mu} \approx 2$$

Experimenteller Zugang: Vergleich von Zyklotron-Frequenz des Teilchens im B-Feld ...

$$\omega_c = \frac{eB}{\gamma m}$$

... und der Larmor-Frequenz der Spin-Präzession

im B-Feld:

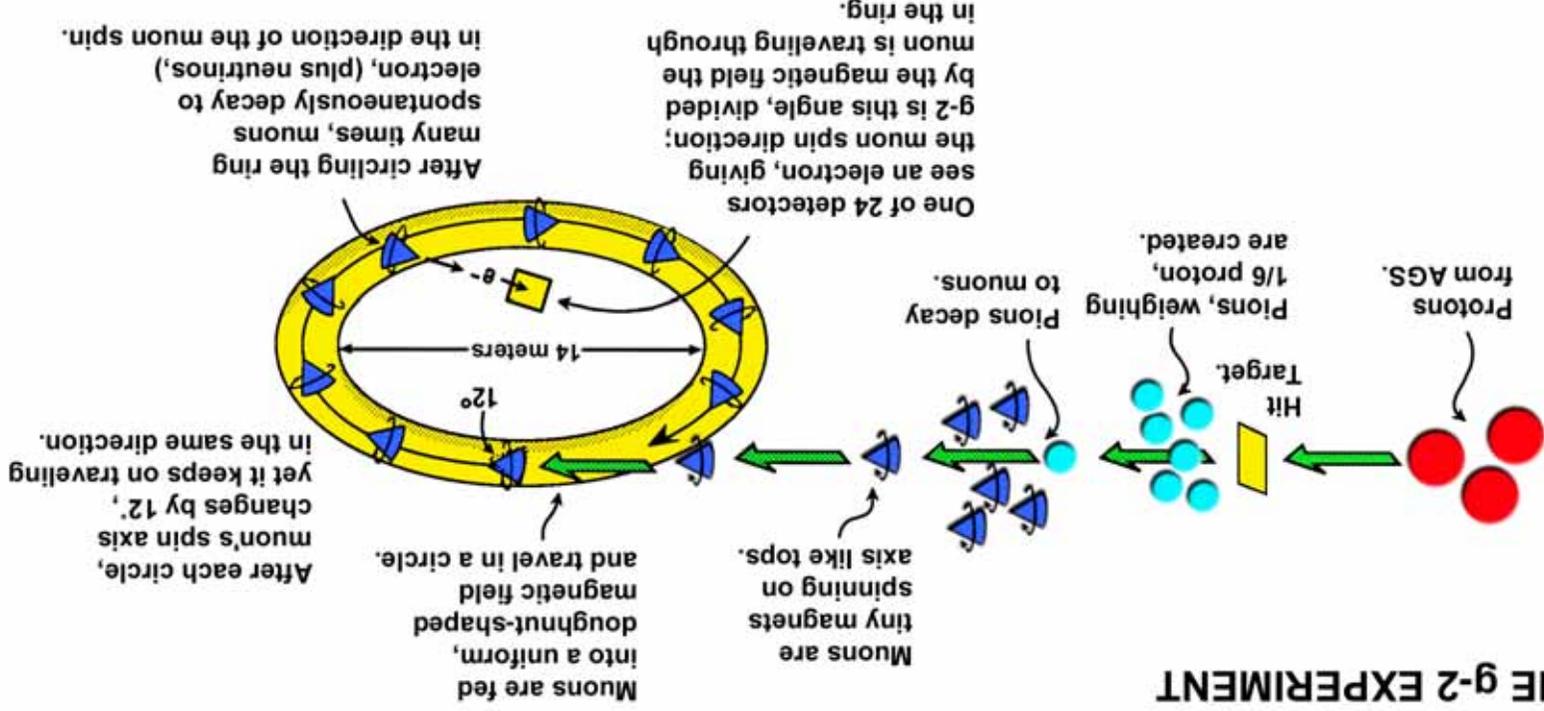
$$\omega_L = \frac{eB}{\gamma m} \left[1 + \frac{\gamma - 2}{\gamma} \right]$$

Zu $t=0$ seien Spin und Impuls des Teilchens parallel \rightarrow Oszillation des Winkels $\phi(t)$ zwischen Spin und Impuls:

$$\phi(t) = (\omega_L - \omega_c) \cdot t = \frac{eB}{\gamma m} \cdot \frac{\gamma - 2}{2} \cdot t$$

4.3 "g-2"

LIFE OF A MUON: THE g-2 EXPERIMENT



- Einschuss von Pionen in Speicherring mit konstantem B-Feld, das durch NMR an Protonen bestimmt wird. Larmor-Frequenz des Protons:

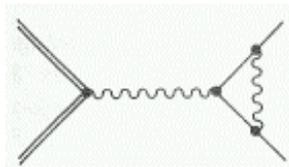
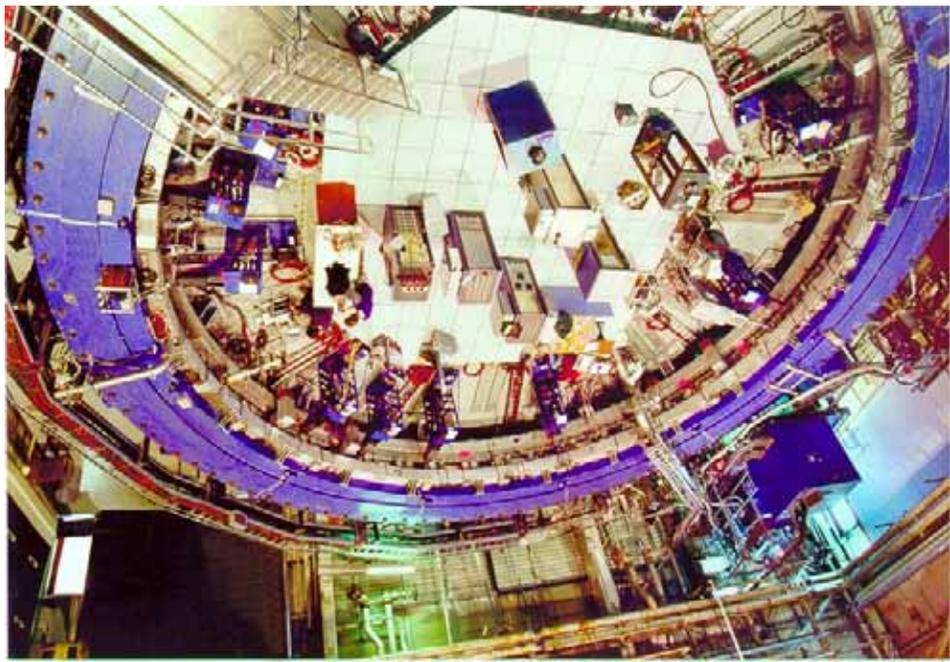
$$\omega_p = g_p \frac{eB}{2m_p}$$

- Myonen sind polarisiert aufgrund der schwachen Wechselwirkung/P-Verletzung im Pion-Zerfall.

$$N_0 e^{-t/\tau} (1 + A(E) \cos(\phi(t)))$$

Myonen zerfallen in Elektronen und Neutrinos, wobei Elektronen bevorzugt entgegen Spinrichtung des Myons gerichtet sind.
 - Nachweis des Winkeldifferenz durch Modifikation der Zählrate von Zerfallselektronen $\mu \rightarrow e \nu_\mu$ in Kalorimetern: Überlagerung des Zerfallsspektrums der Myonen mit Oszillation:

4.3 "g-2"

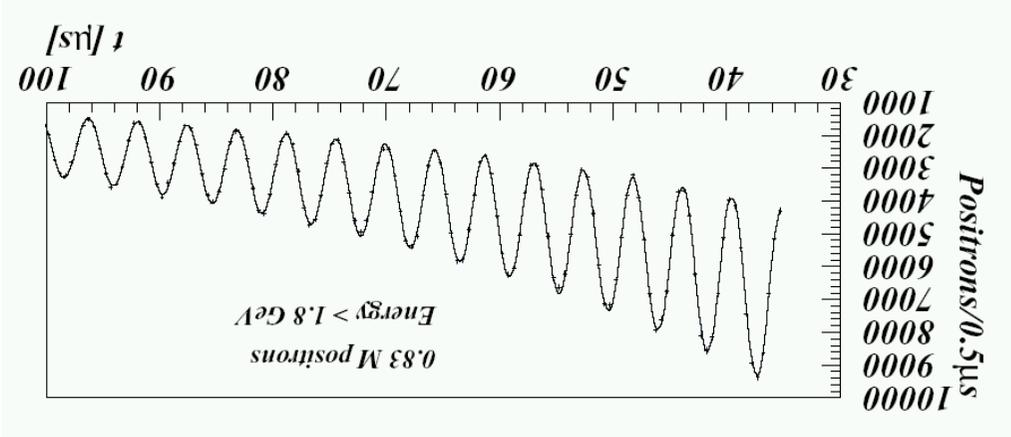


Erklärung der Abweichung von $g=2$:
Vertex-Korrekturen!

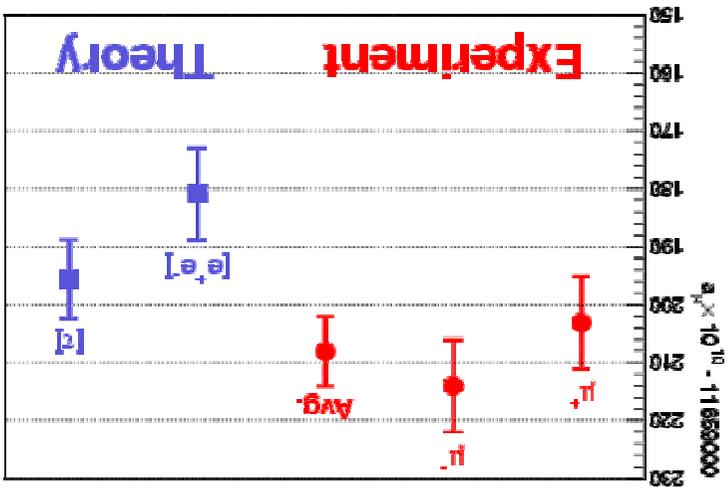
$$\left(\frac{g-2}{2}\right)^e = (1159652.4 \pm 0.8) \cdot 10^{-9} \neq 0$$

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)^\mu = (1165924 \pm 9) \cdot 10^{-9} \neq 0$$

Anpassung der Erwartung in einem Fit liefert Wert von $(g-2)/2$:



$$N_0 e^{-t/\tau} (1 + A(E) \cos(\phi(t)))$$



4.3 LAMB-SHIFT

Erinnerung: Ladungsrenormierte Amplitude:

$$\frac{q_2}{8_{\mu\nu}} \leftarrow -\frac{q_2}{8_{\mu\nu}} - \frac{q}{i} I_{\mu\nu}$$

Coulomb-Term
Extra q^{-2}

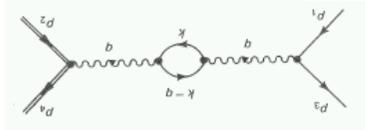
Der neue Term entspricht einer WW zwischen Elektron und Target, der zu einer Modifikation des Potentials führt (aufgrund der WW des Elektrons mit der Elektronenwolke um die Ladung Ze):

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi r} - \frac{Ze^4}{60\pi^2 m^2} \delta(r)$$

Dieser Effekt und andere (weitere Ordnungen, Vertex-Korrekturen etc.) modifiziert v.a. nahe am Kern befindliche Orbitale
→ Lamb-Shift (Aufspaltung von $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$)! Gemessen auf 0.01% → extrem genauer Test der Ideen höherer Ordnungen, Renormierung.

WIEDERHOLUNG: RENORMIERUNG

Einschluss der Vakuum-Polarisation:



$$M = -ie^4 \frac{b}{4} [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] \cdot \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Sp(\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{q} - \not{k} + m))}{(k^2 - m^2)(b - k^2 - m^2)} \right) [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

Wirkt wie Propagator-modifikation:

$$I^{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Sp(\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{q} - \not{k} + m))}{(k^2 - m^2)(b - k^2 - m^2)}$$

$$\frac{b}{8^{\mu\nu}} \frac{b}{2} \leftarrow \frac{b}{8^{\mu\nu}} \frac{b}{4} I^{\mu\nu}$$

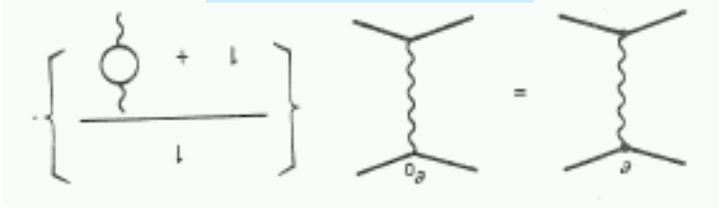
Auswerten und absorbieren der Unendlichkeit in der renormierten Ladung e_R :

$$e_R \equiv e \sqrt{1 - \frac{e^2}{M^2} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2}}$$

$$M = -e^2 [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1)] \left[\frac{b}{8^{\mu\nu}} \frac{b}{2} \left(1 + \frac{e^2}{\Lambda^2} \frac{1}{2} \right) f(b^2) \right] [\bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)]$$

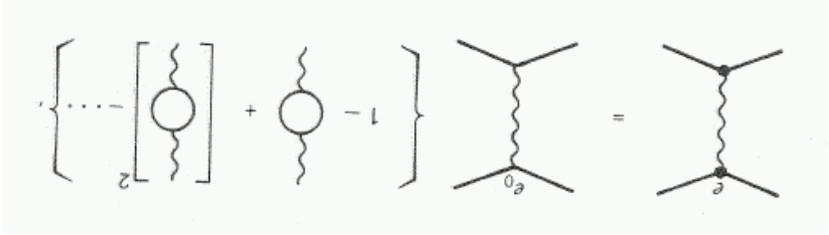
Zusammen mit dem (gemessenen Wert) der Kopplung an einer Referenz-Skala μ :

$$e_R^2(b^2) \equiv e^2 \frac{1}{1 + I(b^2)}$$



Auswertung der geometrischen Reihe:

$$e_R^2(b^2) \equiv e^2 (1 - I(b^2) + I^2(b^2) - I^3(b^2) + \dots)$$



Unter Beachtung aller 1-Schleifen-Diagramme:

$$e(b^2) = \frac{e(n^2)}{e(n^2)} = \frac{e(n^2) \left(1 - \frac{3\pi}{b^2} \ln \frac{n^2}{b^2} \right)}{e(n^2) \left(1 - \frac{3\pi}{\Lambda^2} \ln \frac{n^2}{\Lambda^2} \right)}$$

Verlauf: Renormierungsgruppenungleichung!

Die q^2 -Abhängigkeit wird auch absorbiert:

$$e_R^2(b^2) \equiv e^2(0) \sqrt{1 - \frac{e^2}{\Lambda^2} \frac{1}{2} \frac{f(b^2)}{f(0)}} = e^2(0) \left(1 - \frac{3\pi}{\Lambda^2} f(b^2) \right)$$