TEILCHENPHYSIK FÜR FORTGESCHRITTENE

Die starke Wechselwirkung und Quantenchromodynamik

(Schmüser Kapitel 12)

Caren Hagner
Achim Geiser

Universität Hamburg, IExpPh

Sommersemester 2007

ÜBERBLICK

1. Die quantenmechanische Beschreibung von Elektronen
2. Feynman-Regeln und –Diagramme
3. Lagrange-Formalismus und Eichprinzip
4. QED

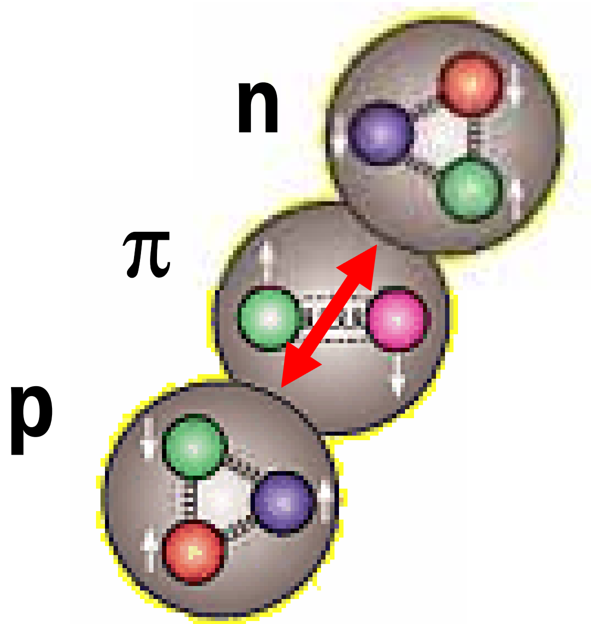
Einschub: Beschleuniger und Experimente

5. Starke Wechselwirkung und QCD
   - 5.1 Einleitung: Quarks und Farbe
   - 5.2 Einschub: Gruppentheorie und Anwendungen
   - 5.3 QCD: die Theorie der starken Wechselwirkung: SU(3)-Eichinvarianz, Gell-Mann-Matrizen, Masselosigkeit der Gluonen, Lagrange-Dichte der QCD, Renormierung, "running coupling", asymptotische Freiheit und Confinement
   - 5.4 Anwendung: Jets, Fragmentation, Entdeckung des Gluons, Messung des Gluonspins
   - 5.5 Perturbative QCD: Wirkungsquerschnitte, Messung von α_s, Struktur des Protons

5.1 Einleitung: Quarks and Farbe

Hideki Yukawa
(Nobel 1949)

- **starke Kraft in Kernwechselwirkungen**
  = „Austausch von massiven Pionen" zwischen Nukleonen (Yukawa 1945)
  = residuelle Van der Waals-artige Wechselwirkung



- **modernes Bild:**
(Quantenchromodynamik, QCD)
Austausch von masselosen Gluonen zwischen den Quark-Konstituenten

„ähnlich" zu Elektromagnetismus
(Quantenelektrodynamik, QED)

zunächst nur drei Quark-Flavour bekannt:
u,d,s

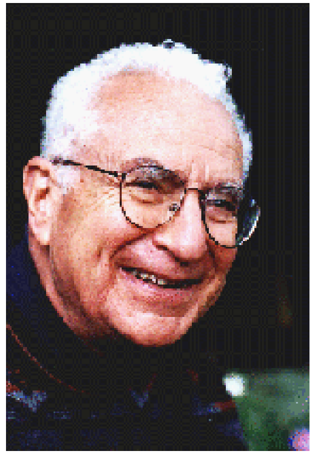
5.1. Einleitung: Das Quark-Modell (1964)

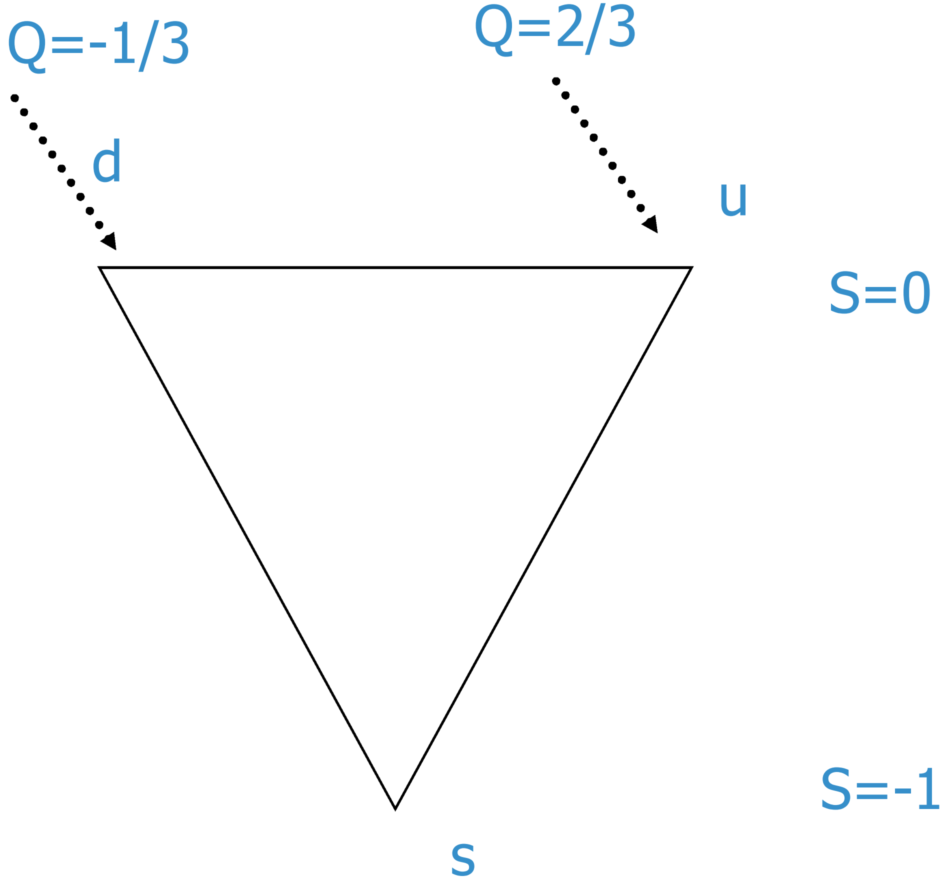
arrangiere u,d,s - Quarks als Flavour-Triplett

=> $SU(3)_{flavour}$-Symmetrie

Murray
Gell-Mann
1962
(quarks)

(Nobel 1969)



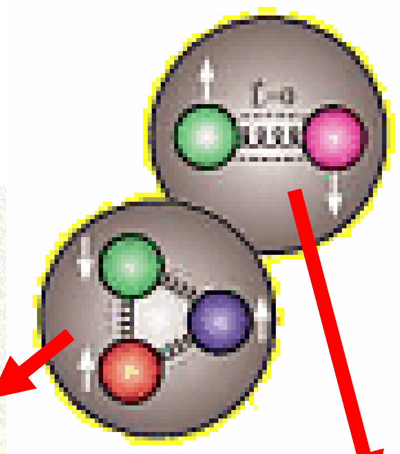


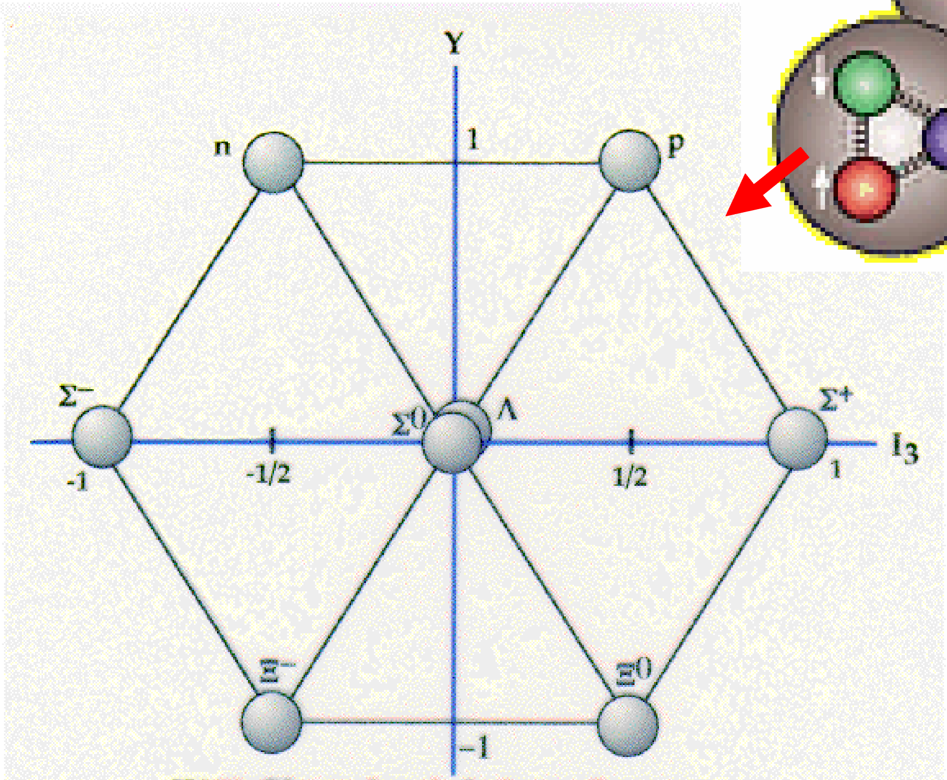
behandle alle bekannten Hadronen (Protonen, Neutrons, Pionen, ...) als Objekte die aus zwei oder drei solchen Quarks (Antiquarks) zusammengesetzt sind

5.1 Einleitung: Das Quark-Modell

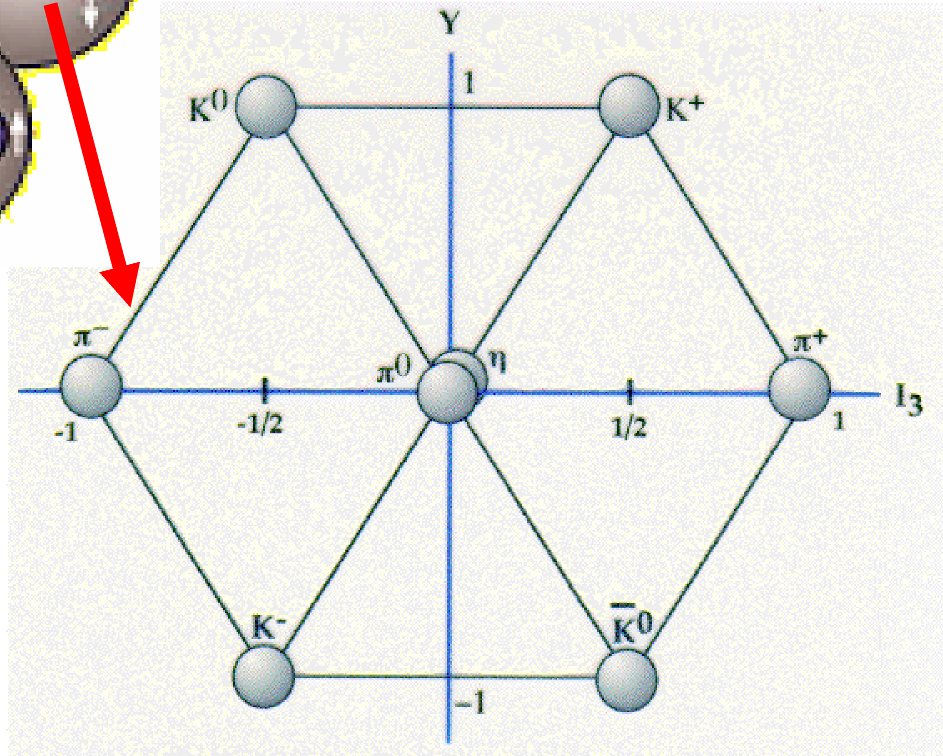
Baryonen = qqq

Mesonen = $q\bar{q}$





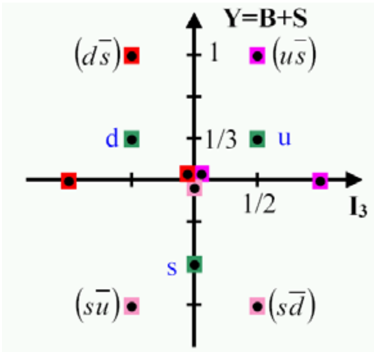
SU(3)-Oktett der einfachsten Baryonen



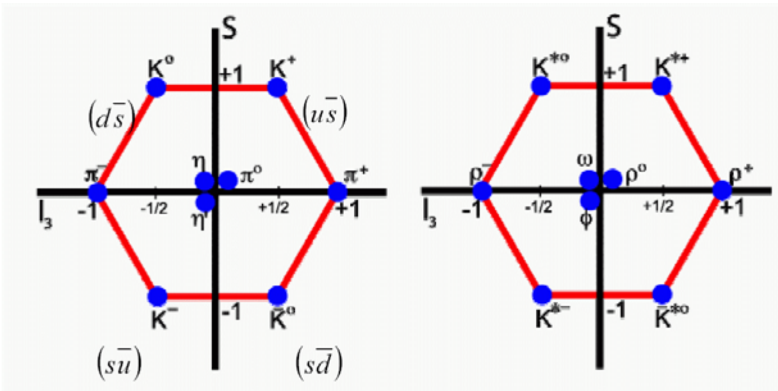
SU(3)-Oktett der einfachsten Mesonen

5.1. Einleitung: Das Quark-Modell

Darstellungsdiagramme erlauben leichte Übersicht der erreichbaren Kombinationen: Z.B. Kombination von Triplett mit Antitriplett ("Vektoraddition"):



Je nach Spinzustand ergeben sich **Pseudoskalare Mesonen ($J^P=0^-$) oder Vektormesonen (1^-):**



Anwendung von Schiebeoperatoren (später) zeigt:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

Produktvektorraum der Mesonen gliedert sich also in 2 Teilräume: ein Oktett und ein Singlett (gebildet durch das η'-Teilchen).

Die Teilchen auf dem Rand der Pseudoskalare sind gut bekannt. Von den drei I_3=S=0-Zuständen fallen 2 ins Oktett, eins ins Singlett; sie sind Mischungen:

Pseudoskalar
$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \quad \eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Vektor
$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \quad \omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad \phi^0 = s\bar{s}$$

Der Mischungscharakter wird experimentell bestimmt; nicht theoretisch vorhersagbar/verstanden.

Analog kann man **Baryonen** aus drei Quarks u,d,s konstruieren. Es zeigt sich:

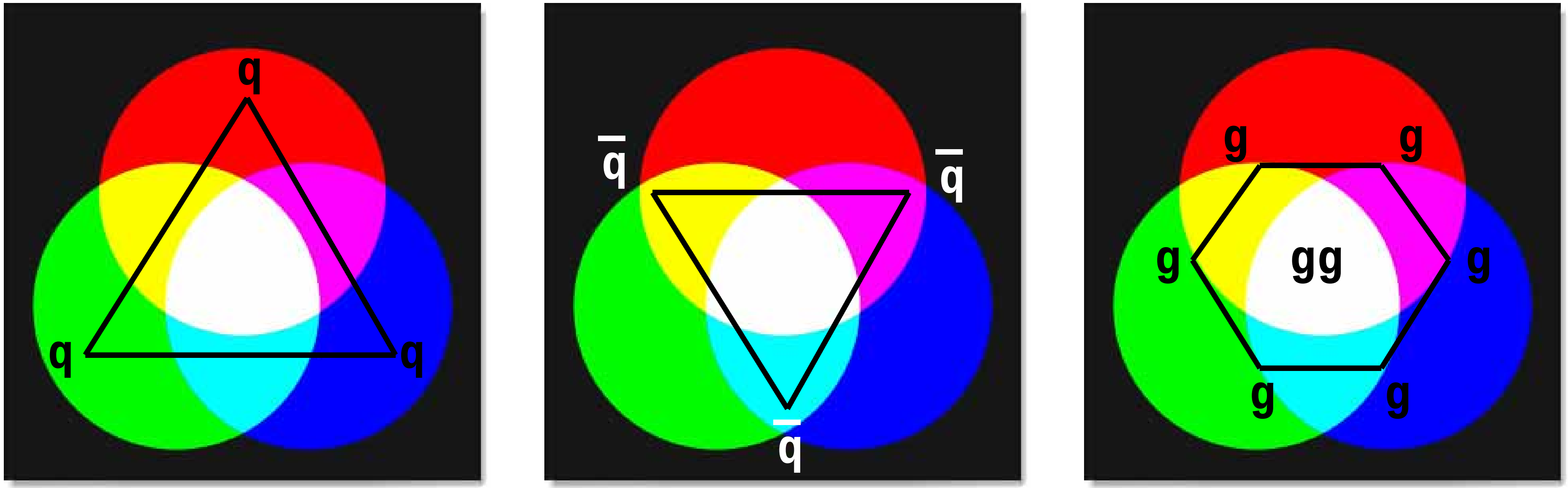
$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

- Dekuplett (Δ) total symmetrisch in Quark-Flavour, Spins alle parallel (J=3/2).
- Oktetts (mit p,n): Symmetrisch bzgl. Vertauschung zweier Quarks inklusive Spins; keine def. Symmetrie bei Betrachtung der von Flavour/Spin alleine.

5.1. Einleitung: Farbe

Quark-Modell sehr erfolgreich, aber scheint Fermi-Statistik (Pauli-Prinzip) zu verletzen: $|\Delta^{++}\rangle = |uuu\rangle|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$

=> führe neuen Freiheitsgrad ein: **Farbe**



- **3 Farben -> SU(3)$_{colour}$** **$qqq = q\bar{q}$ = weiss!**

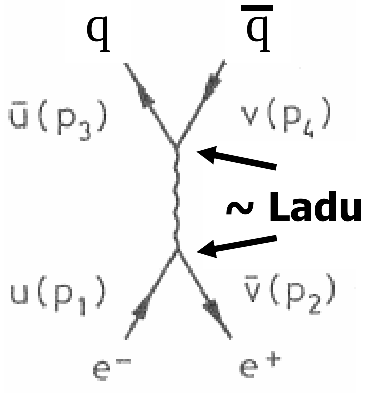
5.1 Farbe (Colour) als physikalisches Konzept

Experiment: $e^+ e^- \to$ Hadronen (~ $e^+ e^- \to$ Quark + Antiquark)

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot Q_{in}^2 \cdot Q_{out}^2 + Z^0 + \mathrm{Re}\,sonanzen$$

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to Hadronen)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = N_{Colour} \sum_{i=Quarks} Q_i^2$$

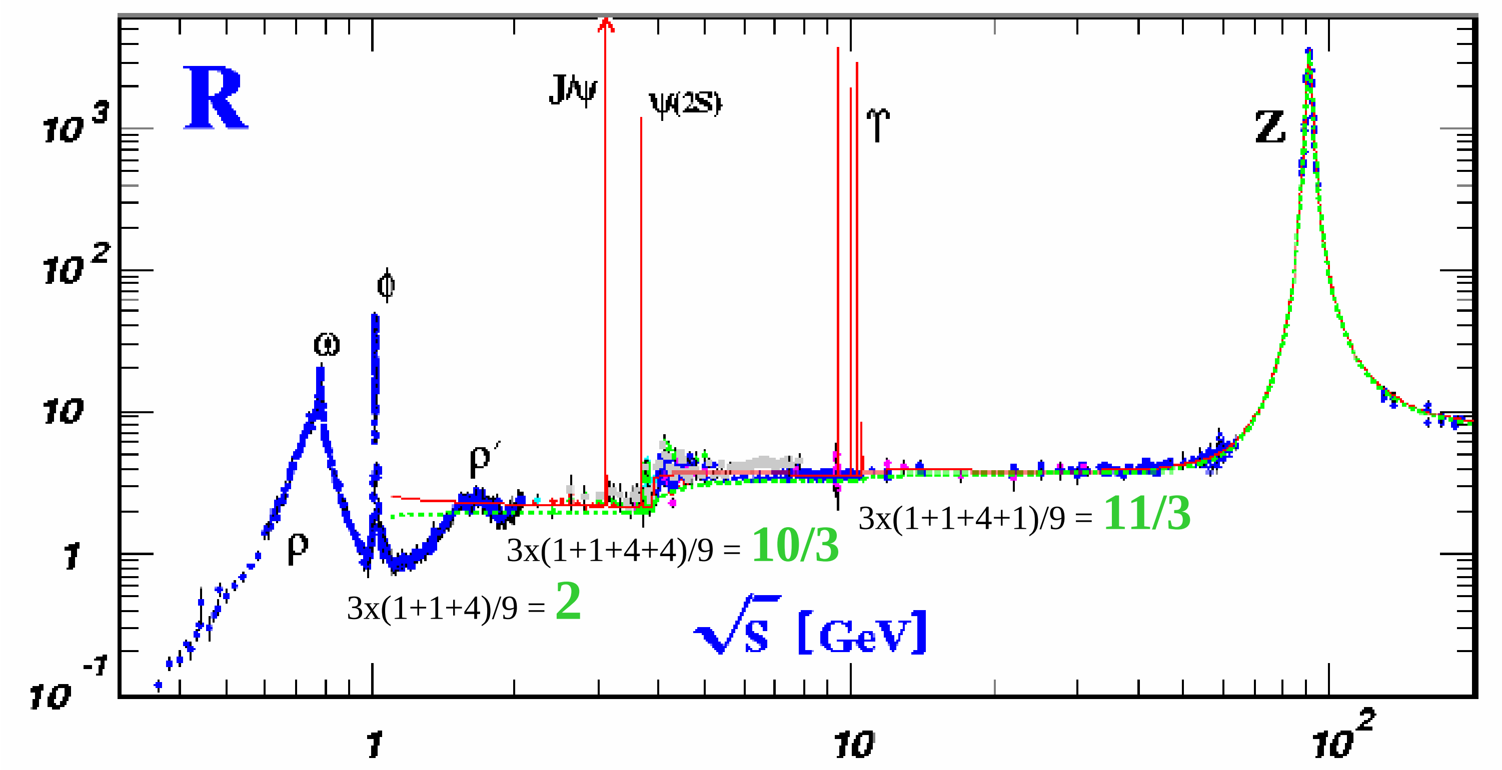
Σ über Quarks mit m > √s/2



Charmschwelle **3.7 GeV**
ΔR= 4/3 = 3x(2/3)² →
N_C=3, Q_{Charm}=2/3

Beautyschw. **10.5 GeV**
ΔR= 1/3 = 3x(1/3)² →
N_C=3, Q_{Beauty}=1/3

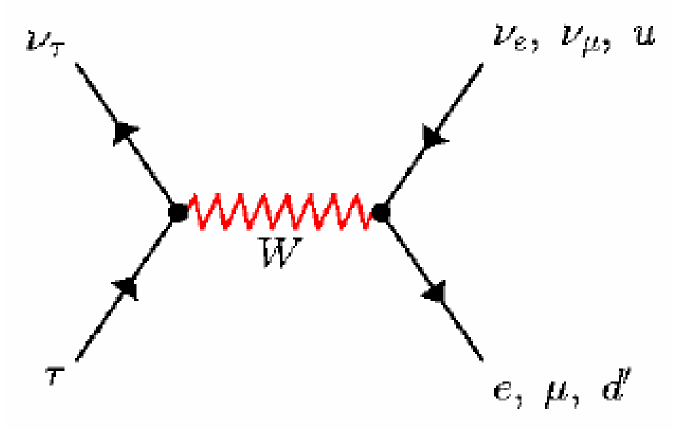
→ **N_{Colour}=3**
(außerdem Resonanzen bei Schwellen + Z^0)



5.1 Farbe (Colour) – Ladung der starken WW

Weitere Experimente zu Anzahl Farben:

Zerfall des τ-Leptons:



- W-Boson koppelt mit gleicher Stärke an Fermiondubletts →

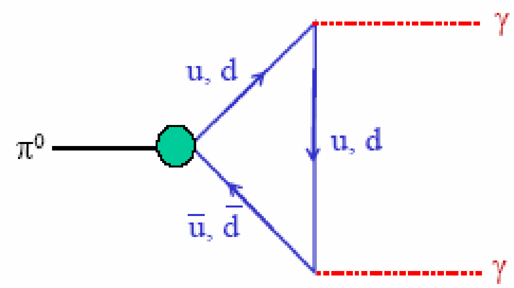
$$\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau X) = \Gamma(\tau^- \to \nu_\tau e^- \overline{\nu}_e) + \Gamma(\tau^- \to \nu_\tau \mu^- \overline{\nu}_\mu) + \Gamma(\tau^- \to \nu_\tau d' \overline{u})$$

$$\frac{\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau e^- \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau X)} = \frac{1}{2+N_C} = 0.2$$

$$\boxed{\text{exp.}: 0.1784 \pm 0.0006}$$

- Unterschied: Korrekturen höherer Ordnung

Zerfallsrate des π^0:

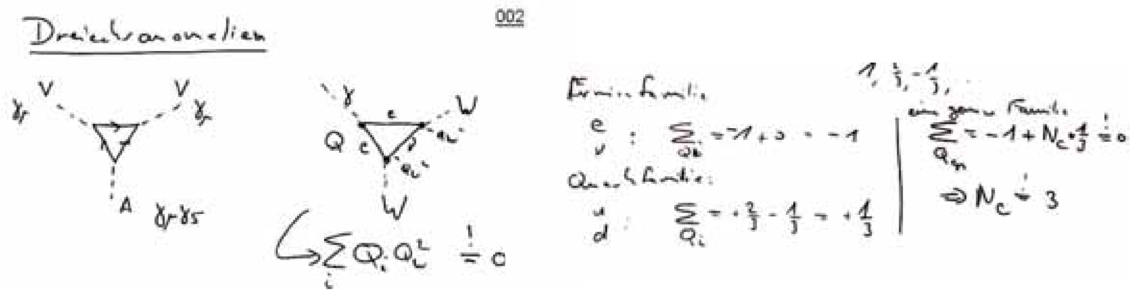


Dreiecks-Diagramm
Jede Farbe trägt zur Zerfalls-amplitude bei.
Drei Farben verändern die Zerfallsrate um einen Faktor 9.

$$M = \frac{e^2}{4\pi^2}(Q_u^2 - Q_d^2)\cdot N_C,\quad \tau = (8.4 \pm 0.6)\cdot 10^{-17}\,s$$

=> **N_C=3.06 +- 0.10**

- außerdem „**Dreiecks-Anomalie**" im SM:
  ΣQ(Quarks)+ΣQ(Leptonen)=0; 3x(2/3-1/3)-1=0



5.2 Einschub: GRUPPENTHEORIE

Symmetrieprinzip: Invarianz eines physikalischen Systems unter Transformationen (z.B. Translation).

- Menge der möglichen Transformationen: **Gruppe**
  Gruppe ≡ Menge G der Elementen R_i verknüpft mit Operation "*" wenn gilt:
    – Abgeschlossenheit: R_i, $R_j \in G$ → $R_i * R_j \in G$
    – Existenz des 1-Elements: $R_i * 1 = R_i$
    – Existenz des Inversen: $R * R^{-1} = 1$
    – Assoziativität: $R_i*(R_j*R_k) = (R_i*R_j)*R_k$.
- Gruppe heisst nicht-abelsch, falls: $R_i*R_j \neq R_j*R_i$.
- Diskrete Gruppen: z.B. Gruppe der Permutationen dreier Objekte "S_3" mit 6 Elementen.

$$1:(123)-(123) \qquad \mathrm{b:antizykl.Vertausch.} \quad d:3\leftrightarrow 1$$
$$\mathrm{a:zykl.Vertauschung} \qquad c:2\leftrightarrow 3 \qquad e:1\leftrightarrow 2$$

- Kontinuierliche (Lie-)Gruppe: unendliche Zahl von Elementen, die kontinuierlich von d Parametern abhängen (d=Ordnung der Gruppe). z.B. räumliche Rotation mit d=3 Parametern (3 Euler-Winkel)
- Darstellung einer Gruppe: Wenn es eine isomorphe Abbildung zwischen den Gruppenelementen R_i und einer Menge von n×n-Matrizen Γ gibt mit $\Gamma(R_1)\Gamma(R_2)=\Gamma(R_1R_2)$ → dann Gruppe der Matrizen Γ Darstellung der Gruppe (mit Dimension = n)

(z.B. 3dim-Drehgruppe ist isomorph zur Gruppe SO(3) orthonormaler 3×3-Matrizen mit det=1)

- Darstellungen der Drehgruppe: z.B. Dimension 2 → Pauli-Matrizen → Multipletts mit Drehimpuls J=1/2).
- Darstellung reduzibel wenn durch Transformation M Γ blockweise diagonalisiert werden kann:

$$\Gamma'(R) = M^{-1}\Gamma M = \begin{pmatrix} \Gamma^{(1)}(R) & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma^{(2)}(R) & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Jedes $\Gamma^{(i)}$ ist auch eine Darstellung der Gruppe!

- Irreduzible Darstellung: wenn die $\Gamma^{(i)}$ nicht weiter reduzierbar. Beispiel: Gruppe "S_3":

Vorher / Nachher	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} =$	$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x\\z\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}z\\y\\x\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}$
Transf.-Matrix	$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{pmatrix}$

Darstellung ist reduzibel:
- (x+y+z) bleibt invariant → Wahl neuer Achsen X,Y,Z, Z ⊥ Ebene (x+y+z=const) → Z invariant
- neue Trafo-Matrizen →

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

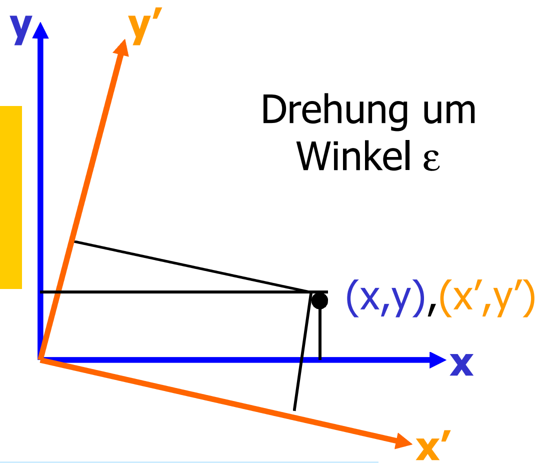
Zerlegung 3=2⊕1

5.2 BEISPIEL: RAUMDREHUNG FÜR SKALAR

U sei die Transformation, die eine Drehung R des Systems z.B. um Achse z bewirkt (Gruppe SO(3)):

$$\psi'(x,y,z) = U\psi(x,y,z) = \psi(R^{-1}(x,y,z))$$

Drehung R des phys. Systems entspricht Drehung R^{-1} des Koordinatensystems.



infinitesimale Drehung ε:

$$x' \sim x - \varepsilon y \qquad y' = y + \varepsilon x$$

$$dx = x - x' = \varepsilon y \qquad dy = y - y' = -\varepsilon x$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} U\psi(x,y,z) &= \psi(x + dx, y + dy, z) \\ &= \psi(x,y,z) + dx\frac{\partial\psi}{\partial x} + dy\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= \psi(x,y,z) + \varepsilon y\frac{\partial\psi}{\partial x} - \varepsilon x\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= \left(1 - i\varepsilon(xp_y - yp_x)\right)\psi(x,y,z) \qquad p_x = -i\partial/\partial x \\ &= \left(1 - i\varepsilon J_z\right)\psi(x,y,z) \end{aligned}$$

J_z nennt man den Generator der Drehung.

Viele infinitesimale Drehungen hintereinander:

$$U(\theta) = [U(\varepsilon)]^n = \left[1 - i\frac{\theta}{n}J_z\right]^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-i\theta J_z}$$

… und ebenso für die x,y-Achsen. Dabei gilt die Lie-Algebra: $[J_k, J_l] = i\varepsilon_{klm}J_m$

Anmerkungen:

- die Lie-Algebra beschreibt die Struktur der Gruppe.
- die ε_{klm} sind die Strukturkonstanten der Gruppe; sie alleine legen die physikalischen Konsequenzen fest!
- Dimensionen der Matrizen J hängen vom physikalischen System ab: e.g. Spin-1/2 → n=2.
- im Falle der Dimension n gibt es n^2-1 Generatoren.
- Generatoren sind hermitisch mit Spur=0.
- jeder diagonalisierbarer Generator → additive Quantenzahl.
- Multiplett: Invarianter Vektorraum entarteter Eigenfunktionen einer Symmetriegruppe.
- Anzahl gleichzeitig diagonalisierbarer Generatoren: Rang r → r unabhängige (Casimir-)Operatoren mit gleichen Eigenwerten für alle Multiplett-Zustände

Unitär: $U^{-1}=U^{+}$ (herm.konjugiert) … **U(n)**
Speziell: unitär mit det=1 … **SU(n)**
Orthogonal: reelle unitär; **SO** speziell unitär … e.g. SO(3)

5.2 Beispiele für Matrizendarstellung der SO(3)=SU(2)

<u>Gruppentheorie</u> 001

Beispiele für Darstellung der Gruppengeneratoren der $SO(3) \hat{=} SU(2)$

<u>3 Dimensionen:</u>

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

<u>2 Dimensionen:</u> Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Generator für Drehungen im Spinraum ($SO(3)$)

Generatoren für Isospin (schwach oder stark) $SU(2)$

5.2 INNERE SYMMETRIEN, SU(2)-ISOSPIN

Bis jetzt räumliche Drehungen; jetzt innere Symmetrien:

Symmetrie bzgl. eines abstrakten Raumes, von dessen Koordinaten die Wellenfunktion nicht explizit abhängt.
Beispiele:

- SU(2)-Isospin (Heisenberg, entspricht Flavour-SU(2)):

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}: \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; und \; n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

- SU(2) schwacher Isospin: Dubletts/ Tripletts:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W^+ \\ W^3 \\ W^- \end{pmatrix}$$

-SU(3)-Flavour: $\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$

- SU(3)-Colour: $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$

SU(2)-Isospin:
Von Heisenberg 1932 zur Beschreibung von n,p in einer Darstellung entwickelt: Generatoren sind hier die Pauli-Spin-Matrizen $J_i \equiv I_i = 1/2\sigma_i$; es gilt z.B.:

$$I_3 p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}p, \quad I_3 n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}n$$

Auf/Absteige-(Schiebe-)Operatoren

$$I_+ \equiv \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_+ n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p$$

Anwendung auf andere als Isospin-1/2-Systeme:

– Isospin-0: |0,0>, $I_3 = I_+ = I_- = 0$ → "trivial"

– Isospin-1: |1,-1> |1,0> |1,1>

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung auf Systeme wie $\pi^+\pi^0\pi^-$, $\Sigma^+\Sigma^0\Sigma^-$, etc.
(→ Übungsaufgabe)

Kombination von Darstellungen (Teilchen):

bisher nur ein Teilchen betrachtet – Systeme mit mehrerer Teilchen → Rückgriff auf Addition von Drehimpulsen aus der Quantenmechanik:

Teilchen 1 und 2 mit Drehimpulsen J_1, J_2 und dritten Komponenten m_1, m_2:

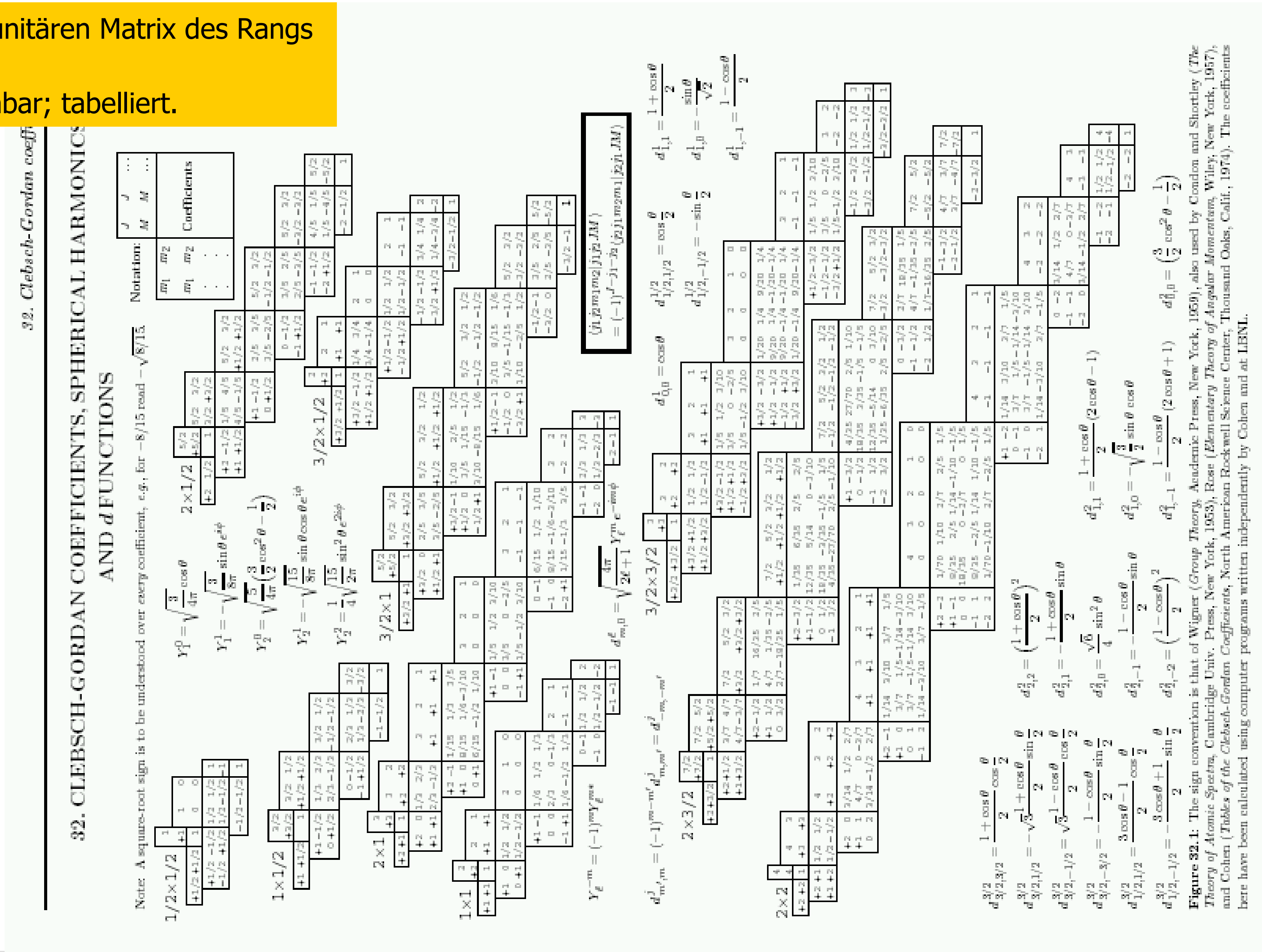
$$|J_1 - J_2| \le J \le |J_1 + J_2| \qquad m = m_1 + m_2$$

$$|J,m\rangle = \sum_{m_1,m_2} \langle m_1,m_2 | J,m\rangle |m_1,m_2\rangle \qquad C(m_1,m_2,J,m) \equiv \langle m_1,m_2 | J,m\rangle$$

Clebsch-Gordan Koeffizienten geben an, wie sich Zustand |J M> aus $|J_1\, m_1\rangle$ und $|J_2\, m_2\rangle$ zusammen setzt:

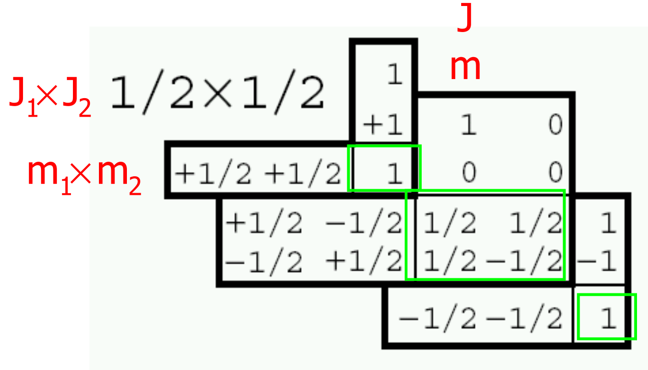
5.2 CLEBSCH-GORDAN-KOEFFIZIENTEN

- Elemente einer unitären Matrix des Rangs $(2J_1+1)(2J_2+1)$.
- Explizit berechenbar; tabelliert.



5.2 CGK: BEISPIEL, ANWENDUNG

Addition zweier Spin-1/2-Teilchen:



Also:

$$|1,1\rangle = 1\cdot\left|m_1=+\frac{1}{2}, m_2=+\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|1,-1\rangle = 1\cdot\left|m_1=-\frac{1}{2}, m_2=-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle$$

Es ergeben sich also aus der Kombination von 2 Dubletts 4 Zustände, drei in einem Triplett und einer in einem Singlett. **Symbolisch**:

$$2\otimes 2 = 3\oplus 1$$

Anwendung auf Isospin I und die Kombination von n,p zu N-N-Systemen (Analogie zum QM-Spin):

	$I_3=1$	pp	$\uparrow\uparrow$
$I=1$	$I_3=0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(pn+np)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow)$
	$I_3=-1$	nn	$\downarrow\downarrow$
$I=0$	$I_3=0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(pn-np)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)$

Erweitere Definition der **Auf/Absteige-Operatoren** etc. für Kombinationen von Teilchen, z.B.:

$$I_3^{ges} = I_3^{(1)} + I_3^{(2)}$$
$$I_+^{ges} = I_+^{(1)} + I_+^{(2)}$$

Erster Summand wirkt nur auf "erstes" Teilchen etc.

$$\bar{I}_3(np) = (I_3^{(1)} + I_3^{(2)})(np) = (I_3^{(1)}n)p + n(I_3^{(2)}p) = \ldots$$

Erweiterung auf Antiteilchen:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\bar{n} \\ \bar{p} \end{pmatrix} \quad \bar{I}_i = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad I_3^{ges} = I_3 + \bar{I}_3$$

"-"-Zeichen, weil Ladungskonjugation
und Isospin-Rotation nicht unabhängig voneinander!

Anwendung auf u,d-Quarks statt n,p trivial. Daher gleich der komplexere Fall → **SU(3)-Flavour: u,d,s!**

5.2 SU(3)-FLAVOUR

(Gleiches Werkzeug wie im Fall von SU(3)-Colour)

Erweiterung auf SU(3)-Flavour:

Hier sind die Generatoren die 8 Gell-Mann-Matrizen, die auf die Flavour-Tripletts (u,d,s) wirken:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

Formal betrachtet man hier Drehungen im Flavour-Raum

$$U = \exp(i \sum_i \omega_i \lambda_i)$$

mit 8 "Winkeln" (Parametern) ω_i (→ Ordnung d=8).

– Es gibt 2 Casimir-Operatoren (Rang 2), z.B.:

$$C_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{8} \lambda_i^2 \quad C_2 = \frac{1}{8} \sum_{ijk} f_{ijk} \lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

– λ_3, λ_8 sind diagonal → 2 additive Quantenzahlen, Eigenwerte von:

$$I_3 = \tfrac{1}{2} \lambda_3 \qquad \text{Isospin}$$

$$Y = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \qquad \text{Hyperladung}$$

Gell-Mann-Nishijima: (Y=B+S, Baryonzahl B, Strangeness S)

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}$$

Schiebeoperatoren, die u in d transformieren und den Isospin abfragen:

$$I_+ = \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2) \quad I_- = \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2) \quad I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$$

Es gilt:

$$I_+ d = u \qquad I_+ u = I_+ s = 0$$

$$I_3 u = \tfrac{1}{2} u \quad I_3 d = -\tfrac{1}{2} u \quad I_3 s = 0$$

Strangeness-Operator: $S = \lambda_8 / \sqrt{3} - 1/3$

Man kann auch Schiebeoperatoren u→s und s→d definieren (mithilfe der Matrizen λ_4-λ_7), z.B.:

$$\frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5) s = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u$$

Mit all dem und den Antitripletts/Anti-Generatoren (Umkehrung aller additiven Quantenzahlen)

$$\bar{I}_3 = -I_3 \quad \bar{S} = -S$$

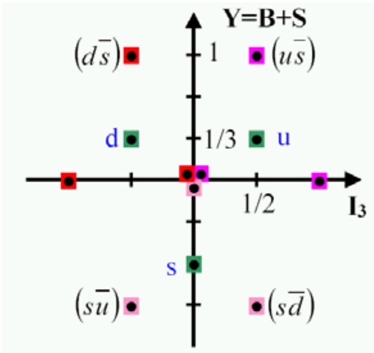
$$\bar{B} = -B \quad \bar{\lambda}_j = -\lambda_j^*$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

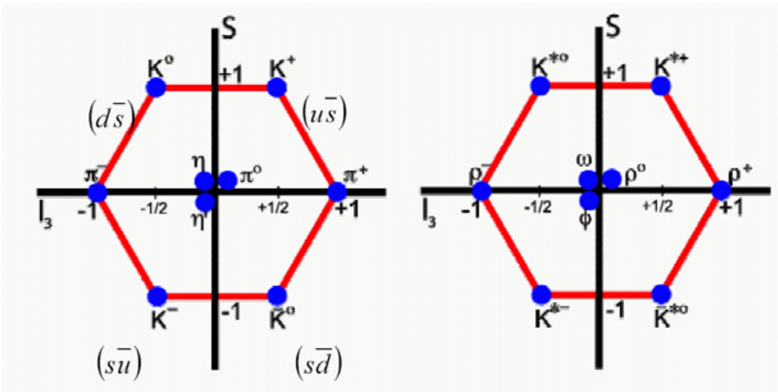
… Werkzeug, um Quark-Antiquark-Systeme zu bauen.

5.2 DARSTELLUNGS-DIAGRAMME

Darstellungsdiagramme erlauben leichte Übersicht der erreichbaren Kombinationen: Z.B. Kombination von Triplett mit Antitriplett ("Vektoraddition"):



Je nach Spinzustand ergeben sich **Pseudoskalare Mesonen ($J^P=0^-$) oder Vektormesonen (1^-):**



Anwendung von Schiebeoperatoren zeigt:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

Produktvektorraum der Mesonen gliedert sich also in 2 Teilräume: ein Oktett und ein Singlett (gebildet durch das η'-Teilchen).

Die Teilchen auf dem Rand der Pseudoskalare sind gut bekannt. Von den drei I_3=S=0-Zuständen fallen 2 ins Oktett, eins ins Singlett; sie sind Mischungen:

Pseudoskalar
$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \qquad \eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Vektor
$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \qquad \omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \qquad \phi^0 = s\bar{s}$$

Der Mischungscharakter wird experimentell bestimmt; nicht theoretisch vorhersagbar/verstanden.

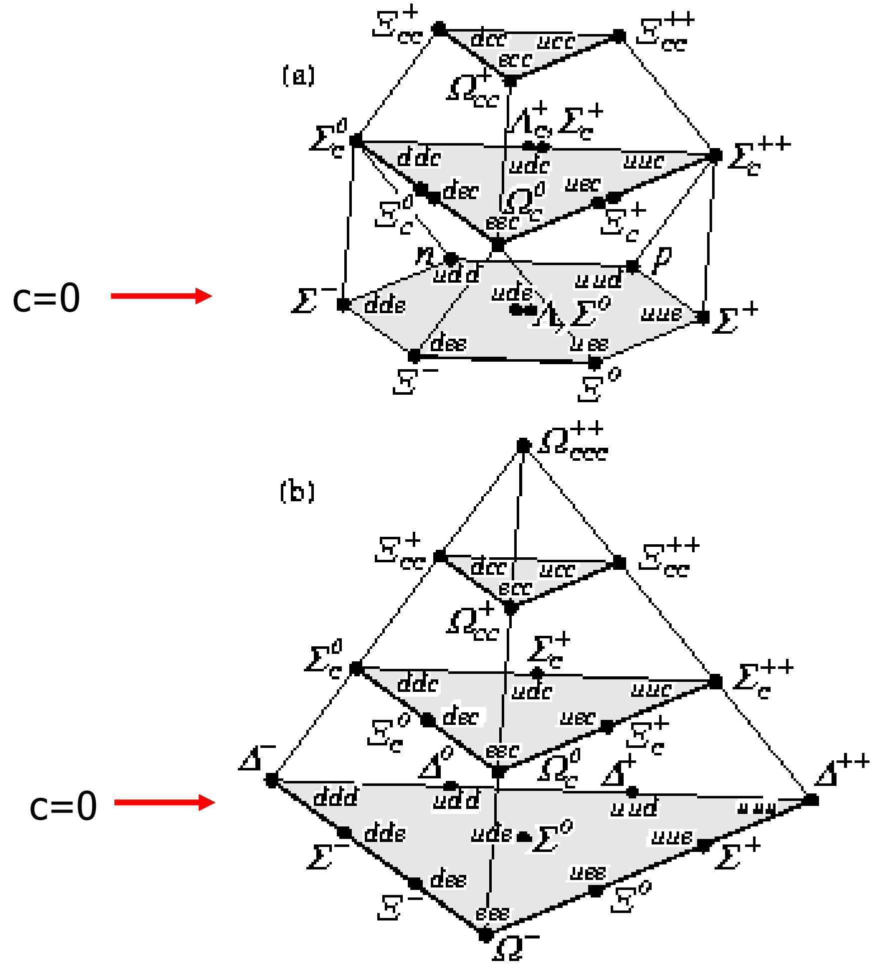
Analog kann man **Baryonen** aus drei Quarks u,d,s konstruieren. Es zeigt sich:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

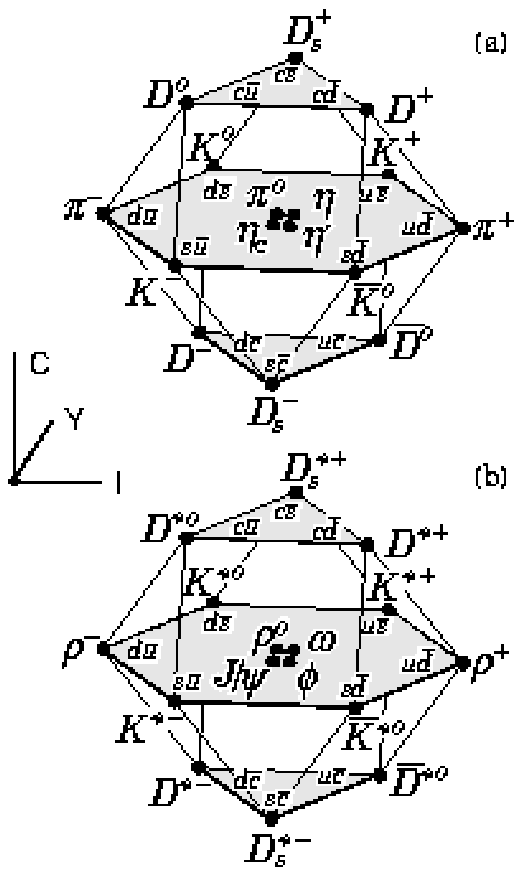
- Dekuplett (Δ) total symmetrisch in Quark-Flavour, Spins alle parallel (J=3/2).
- Oktetts (mit p,n): Symmetrisch bzgl. Vertauschung zweier Quarks inklusive Spins; keine def. Symmetrie bei Betrachtung der von Flavour/Spin alleine.

5.2 DARSTELLUNGS-DIAGRAMME

Übersicht aller Baryonen mit u,d,s,c:



Charm-Mesonen:



Quelle: Particle Data Group (http://pdg.lbl.gov)

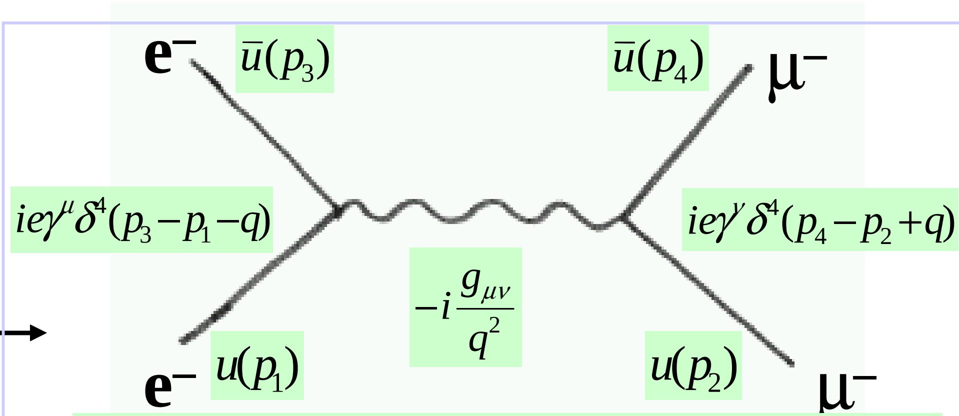
5.3 Erinerung: QED: Muster für Quantenfeldtheorie

Wiederholung QED:

- Beschreibung geladener Leptonen durch Dirac-Spinoren

$$d\sigma \propto \frac{|M|^2 \rho(E_f)}{j_{ein}}$$

- **Wirkungsquerschnitt**:
  |Matrixel.|^2 x (1/Flussfaktor) x Phasenraum
- Struktur der WW - Eichboson (masseloses, neutrales Photon) koppelt an em. Ladung $\gamma^\mu A_\mu$ folgt aus lokaler Eichinvarianz (Gruppe U(1): exp(i·q·χ(x))
- Berechnung der **Matrixelemente** mit Hilfe der Feynman-Regeln (z.B. aus Lagrangedichte ableitbar)

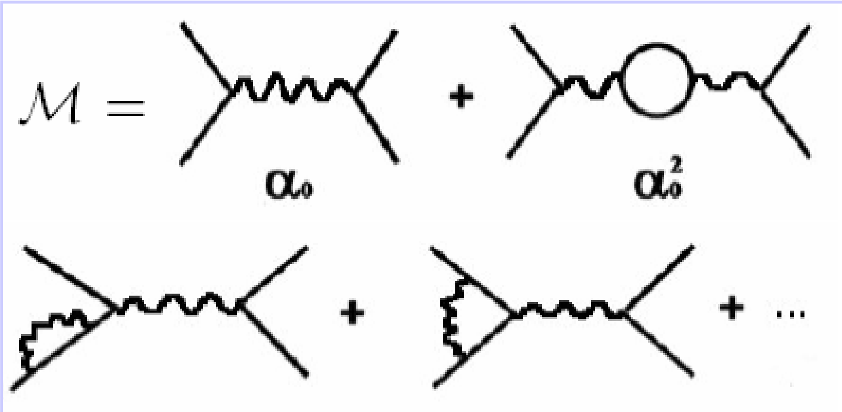


$$M = ie^2\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\frac{-g^{\mu\nu}}{q^2}\bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2)$$

- **Renormierung** (renormailsation):

  Diagramme höherer Ordnung divergieren !
  „behoben“ durch:

  - **Ladungs-Renormierung** → laufendes α
    (ersetze „nackte“ durch „renormierte“ Ladung und lasse Schleifendiagramme weg)
  - **Massen-Renormierung** → laufendes m
    (wie in Festkörperphysik „effektive Massen; in QED durch WW mit den Vakuumfluktuationen)



http://www.itkp.uni-bonn.de/~hammer/HadronSemWS0506/gross_talk.pdf

5.3 QCD: SU(3)-Eichinvarianz

Nach dem Erfolg der QED (und EW) + Realität von Quarks → Theorie der starken WW auf Basis einer Eichtheorie, die invariant unter lokalen Transformationen im Farbraum ist

→ **QCD = Quanten-Chromo-Dynamik**

→ masselose Feldquanten, die an Farbladungen koppeln und als Farb-Antifarb-Zustände farbgeladen sind → **8 Gluonen**

- einfachheitshalber nur ein Quark q:

DGl. freies Quark $(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0$

Wellenfunktion $\Psi = \psi(x) \cdot \chi_{Farbe}$

mit: $\chi_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \chi_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \chi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

Eichtransf.: $\boxed{\Psi \to \Psi' = \exp\left(i(g_S/2)\lambda_j \beta_j(x)\right)\Psi}$

$$\lambda_j \beta_j \equiv \sum_{j=1}^{8} \lambda_j \beta_j$$

$\boldsymbol{g_S}$ … Kopplungskonstante der starken WW
Invarianz nur wenn $\boldsymbol{m_R = m_G = m_B = m}$

$\beta_1 \ldots \beta_8$: 8 unabhängige Transformationswinkel,

$\lambda_1 \ldots \lambda_8$: Gell-Mann Matrizen der SU(3)
Analogon zu den Pauli-Matrizen der SU(2):
$U = \exp(i \cdot \alpha_j \cdot \lambda_j/2)$ "Drehung" um Winkel α_j

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vertauschungsrel. $[\lambda_j, \lambda_k] = \lambda_j \lambda_k - \lambda_k \lambda_j = 2i \cdot f_{jkl} \lambda_l$

antisymm. Strukturkonst. $f_{123} = 1,\quad f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$

$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2$$

→ Struktur QCD sehr komplex,
„nicht-Abelsche" Eicht., da λ_j nicht vertauschen

5.3 QCD: SU(3)-Eichinvarianz + Lagrangedichte

Insgesamt gibt es 9-1=8 Gluonfelder G_j^μ
(eine Kombination ist farbneutral *) !)

→ kovariante Ableitung**) $D^\mu = \partial^\mu + i\frac{g_S}{2}\lambda_j G_j^\mu$

$\left(QED: D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu\right)$

Invarianz ist gewährleistet wenn (Übung):

Dreh. im 3-d Farbraum $\Psi - \Psi' = \exp\left(i(g_S/2)\lambda_j\beta_j(x)\right)\Psi$

$$G_j^\mu \rightarrow G'^\mu_j = G_j^\mu - \partial^\mu\beta_j \boxed{- g_S f_{jkl}\beta_k G_l^\mu}$$

$$\left(\begin{array}{l} QED: \Psi \rightarrow \Psi' = \exp(iq\chi)\Psi \\ \qquad A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi \end{array}\right)$$

Zusatzterm (Konsequenz der Nicht-Vertauschbarkeit der SU(3)-Transformation ~g_S → gleiche Kopplung für alle Quarksorten u,d,s,c,b,t und alle Farbladungen R,G,B [em.: verschiedene Kopplungen (1/3, 2/3, 1, Z)·e !]

*) farbneutrales Gluon würde Kernkräfte mit Reichweite ∞ zur Folge haben;
Gruppe SU(3) hat nur acht λ-Matrizen

**) j … Farbindex – μ … Lorentz-index

Feldstärketensor und Lagrangedichte:

$$F_j^{\mu\nu} = \partial^\mu G_j^\nu - \partial^\nu G_j^\mu - g_S f_{jkl} G_k^\mu G_l^\nu$$

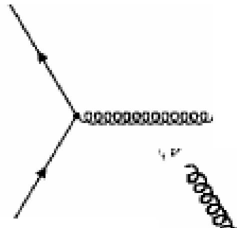
$$L = \overline{\Psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\Psi - 1/4 \cdot F_{j,\mu\nu}F_j^{\mu\nu}$$

$$\left(\begin{array}{l} QED: F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ L = \overline{\Psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\Psi - 1/4 \cdot F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{array}\right)$$

für > 1 Quark: 1ter Term Σ Quarksorten

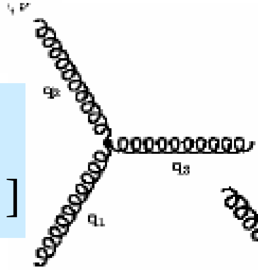
Feynmanregeln – analog zur QED:

Quark-Gluon-V.



$$-i\frac{g_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu$$

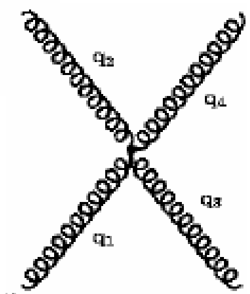
3-Gluon-Vertex



$$-g_S f_{jkl}\lambda^\alpha\gamma^\mu[g_{\mu\nu}(q_1-q_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(q_2-q_3)_\mu - g_{\lambda\mu}(q_1+q_3)_\nu]$$

4-Gluon-Vertex

kompliziert



5.3 Die QCD-Lagrangedichte, (fast) wie QED

Gluon-Feld-Term

Quark+Wechselwirkungsterm

$$L_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{4} F^{(a)}_{\mu\nu}\, F^{(a)\mu\nu} + i \sum_q \overline{\psi}^i_q\, \gamma^\mu\, (D_\mu)_{ij}\, \psi^j_q$$

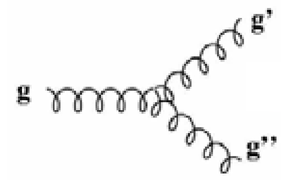
Quark-Massen-Term: $$- \sum_q m_q\, \overline{\psi}^i_q\, \psi_{qi}\ ,$$

Farb-Index

$$F^{(a)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\, A^a_\nu - \partial_\nu\, A^a_\mu - g_s\, f_{abc}\, A^b_\mu\, A^c_\nu\ ,$$

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\, \partial_\mu + i g_s \sum_a \frac{\lambda^a_{i,j}}{2} A^a_\mu\ ,$$

Gluon-Selbst-
wechselwirkung !

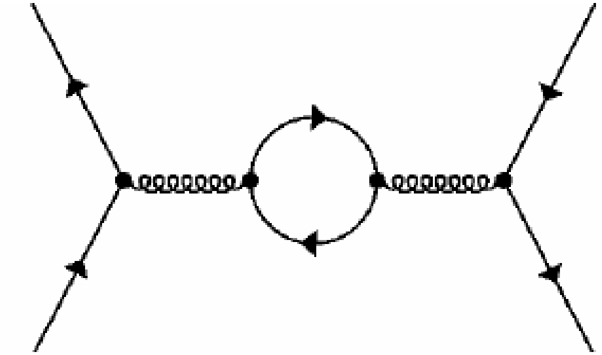


- sieht "harmlos" aus (fast wie QED),
  aber hat es in sich!

5.3 QCD: Renormierung und laufende Kopplung

Wie in der QED divergieren Schleifendiagramme und die ∞-en Werte werden in den Massen und Kopplungen „absorbiert".

Quarkschleifen:



$$g_S^2 = 4\pi\,\alpha_S$$

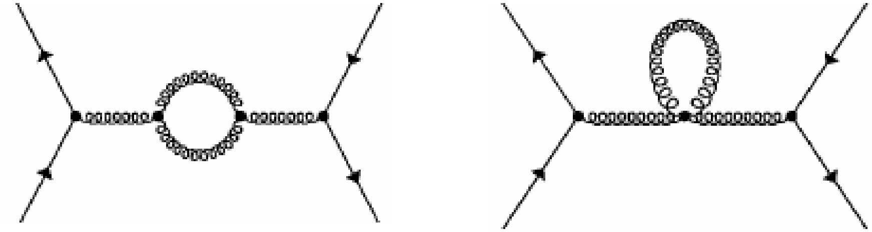
Summe über N_f Quark-Anti-Quark-Paare

$$\alpha_S(Q^2)\Big|_{q\bar{q}} = \alpha_S(Q_0^2)\left(1 + \frac{N_f}{6\pi}\alpha_S(Q_0^2)\ln(\frac{Q^2}{Q_0^2})\right)$$

Abschirmung der „Ladung" bei wachsendem Abstand durch Farbdipole (wie bei der QED)

QED:
$$\boxed{\alpha_{em}(Q^2)\Big|_{e^+e^-} = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\alpha(Q_0^2)}{3\pi}\ln(Q^2/Q_0^2)}}$$

Gluonschleifen (wegen Selbstkopplung):



$$\alpha_S(Q^2)\Big|_{gg} = \alpha_S(Q_0^2)\left(1 - \frac{11}{4\pi}\alpha_S(Q_0^2)\ln(\frac{Q^2}{Q_0^2})\right)$$

\+ → − Verstärkung „Ladung" mit Abstand

Addition und Summierung über alle Ordnungen:

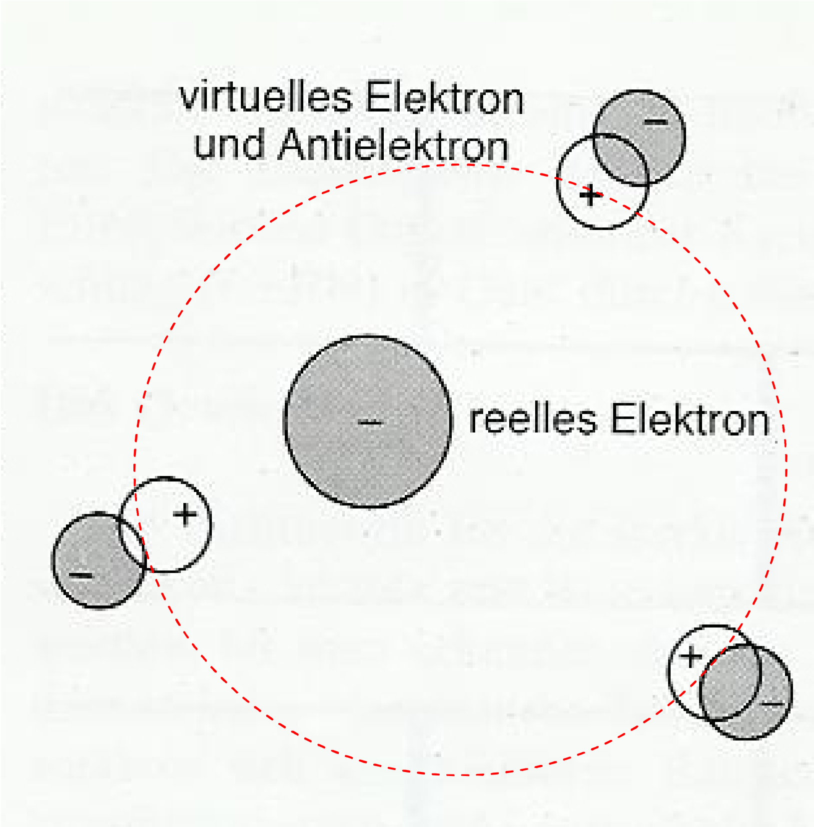
QCD:
$$\boxed{\alpha_S(Q^2) = \frac{\alpha_S(Q_0^2)}{1 + \frac{(33-2N_f)\cdot\alpha_S(Q_0^2)}{12\pi}\ln(Q^2/Q_0^2)}}$$

mit: $\Lambda^2 = Q_0^2\exp(-12\pi/((33-2N_f)\alpha_S(Q_0^2))$

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2N_f)\ln(Q^2/\Lambda^2)}$$

(N_f ... Flavours mit $2m_q < |Q|$)

5.3 QED: Abschirmung der elektrischen Ladung



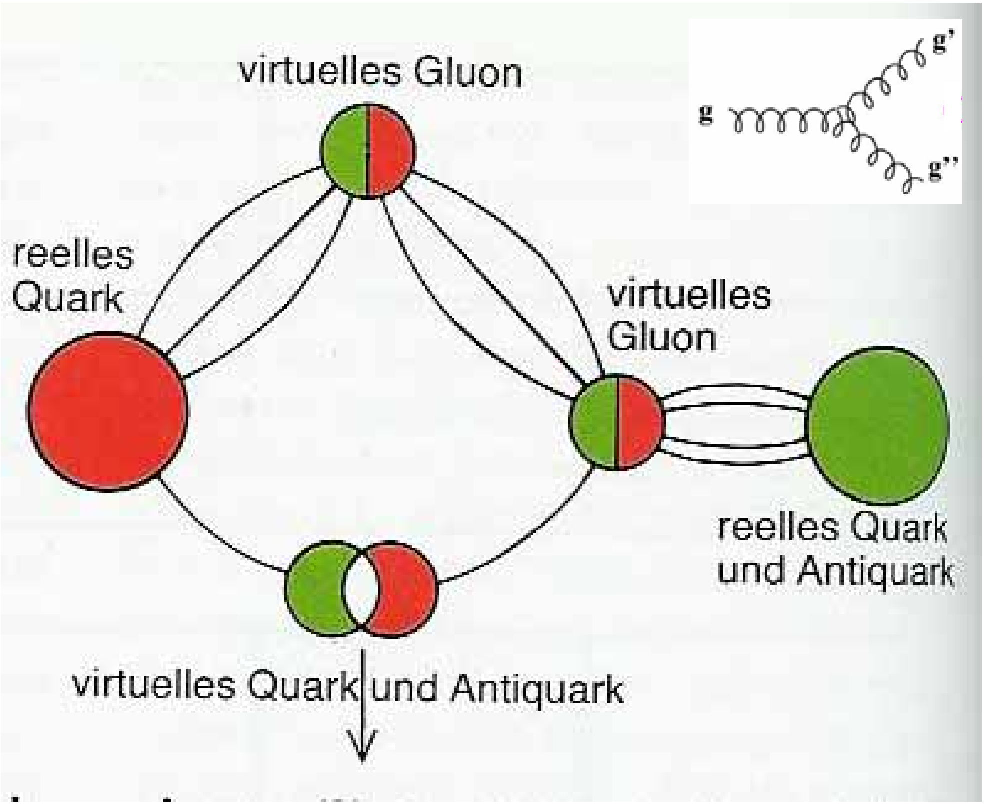
(Nobel 1965)

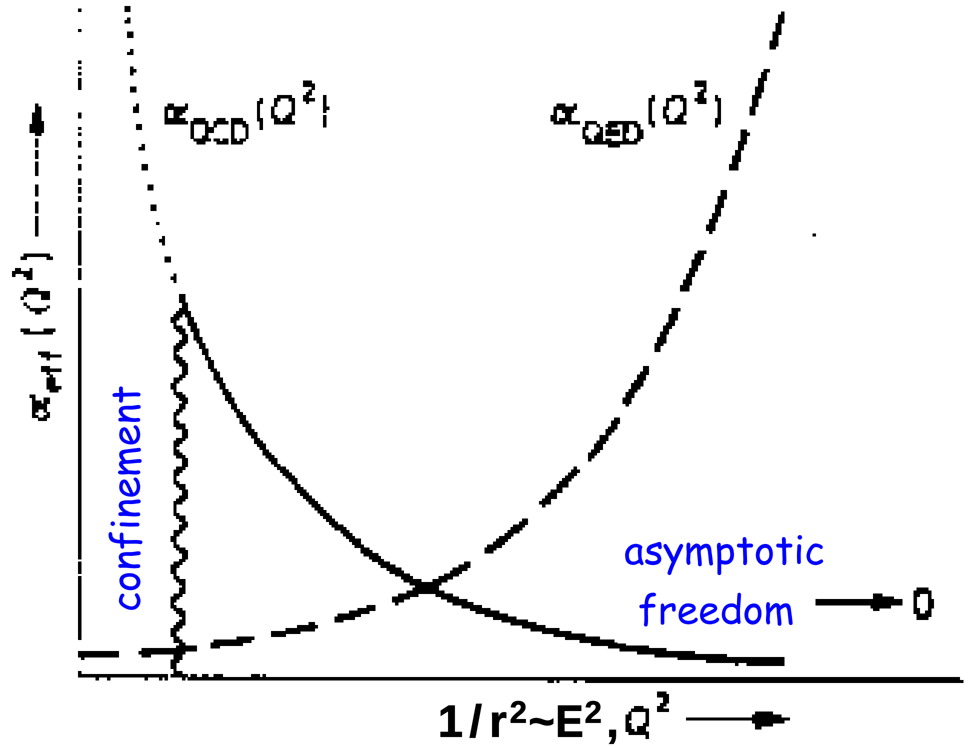
Sin-Itoro Tomonaga   Julian Schwinger   Richard P. Feynman

- elektrische Ladung polarisiert Vakuum -> virtuelle Elektron-Positron-Paare
- Positronen schirmen Elektron-Ladung teilweise ab
- effektive Ladung/Kraft
  - nimmt bei großen Abständen/niedriger Energie ab
  - nimmt bei kleinen Abständen/großer Energie zu

5.3 QCD: Anti-Abschirmung der Farbladung!

- Quark-Antiquark-Paare -> Abschirmung
- Gluonen tragen Farbe -> gg-Paare -> anti-Abschirmung!

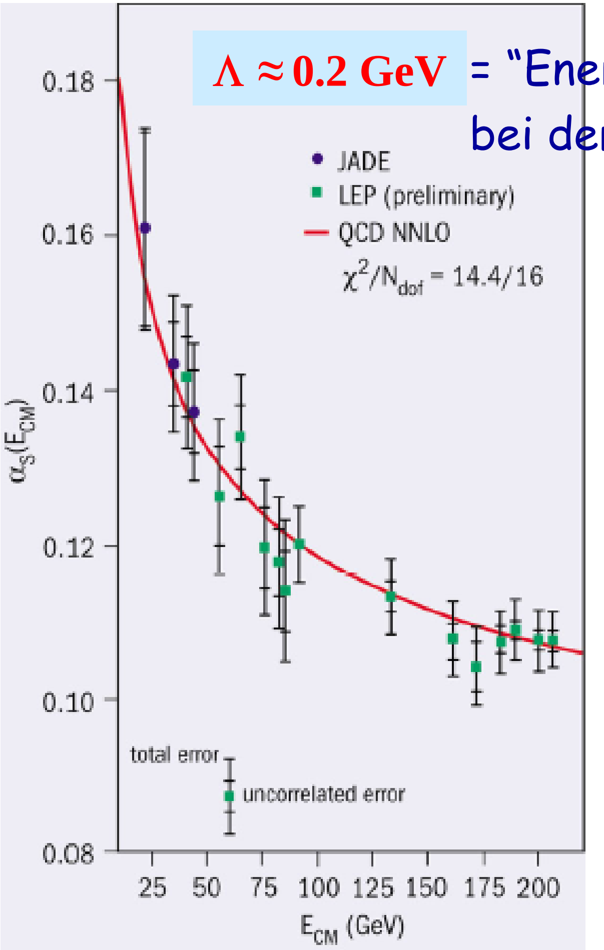




5.3 QCD: Laufende Kopplung – perturbative QCD

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2N_f)\ln(Q^2/\Lambda^2)}$$

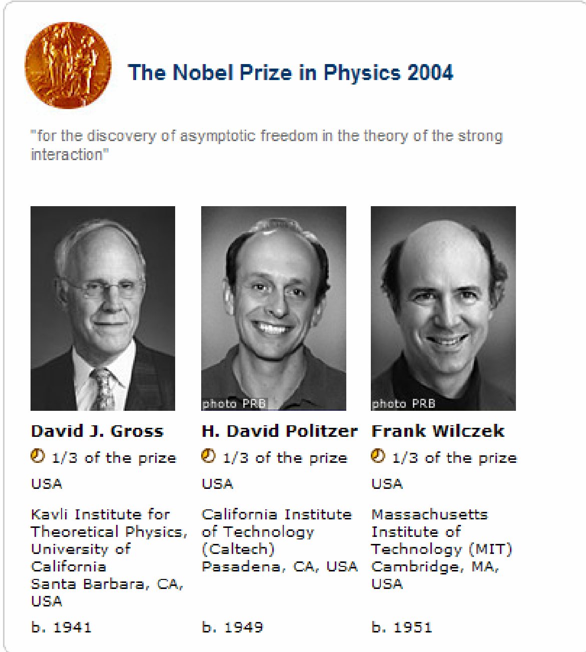
α_S Messung in e+e–WW: $\Lambda \approx 0.2$ GeV

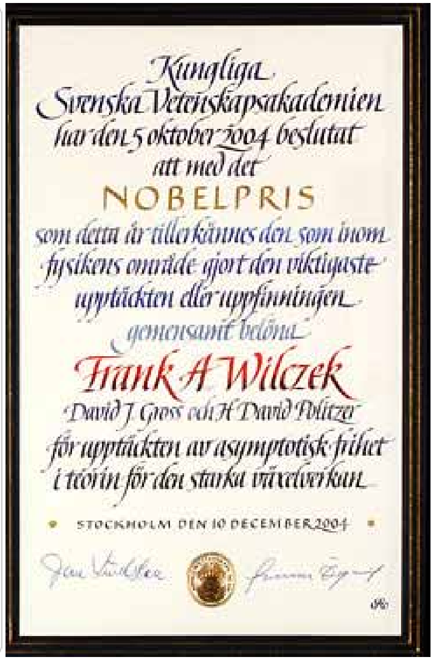


$\Lambda \approx 0.2$ **GeV** = "Energieskala, bei der $\alpha_S \to \infty$"

für Q^2 ($\gg \Lambda^2$) → ∞ α_S → 0: Asymptotische Freiheit

(1972 - D.Green, D.Politzer, F.Wilczek Nobelpreis 2004)





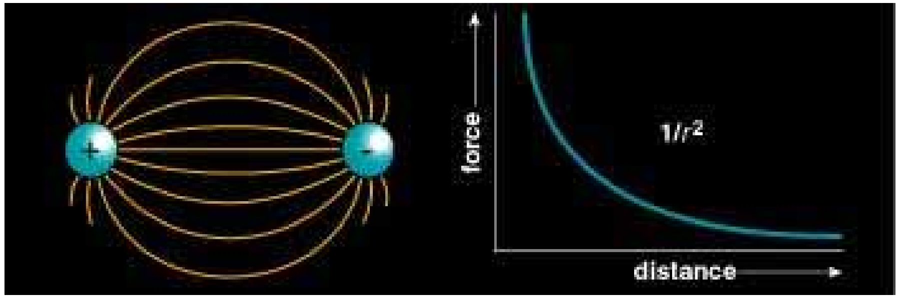
da r = $\hbar c$/|Q| entspricht großes Q kleinen Abständen

→ „perturbative QCD" – Störungstheorie anwendbar,
(ein Gluon-Austausch mit m_g=0 → „Coulomb" V~1/r)

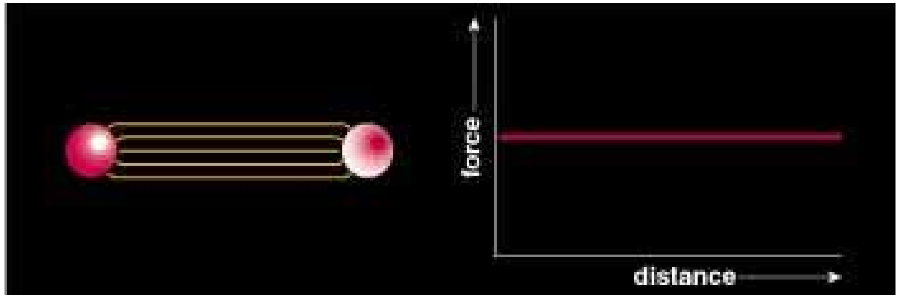
→ Präzisionstests der starken Kraft möglich (mehr später)

5.3 Vergleich QED / QCD

Elektromagnetismus	Starke Wechselwirkung
QED	QCD
1 Ladung (q)	3 verschiedene Ladungen (r,g,b)
Kraft vermittelt durch **Photonen**	Kraft vermittelt durch **Gluonen**
Photonen sind *neutral*	Gluonen sind *geladen* (eg. $r\bar{g}$, $b\bar{b}$, $g\bar{b}$)
α ist fast konstant	α_s hängt stark vom Abstand ab

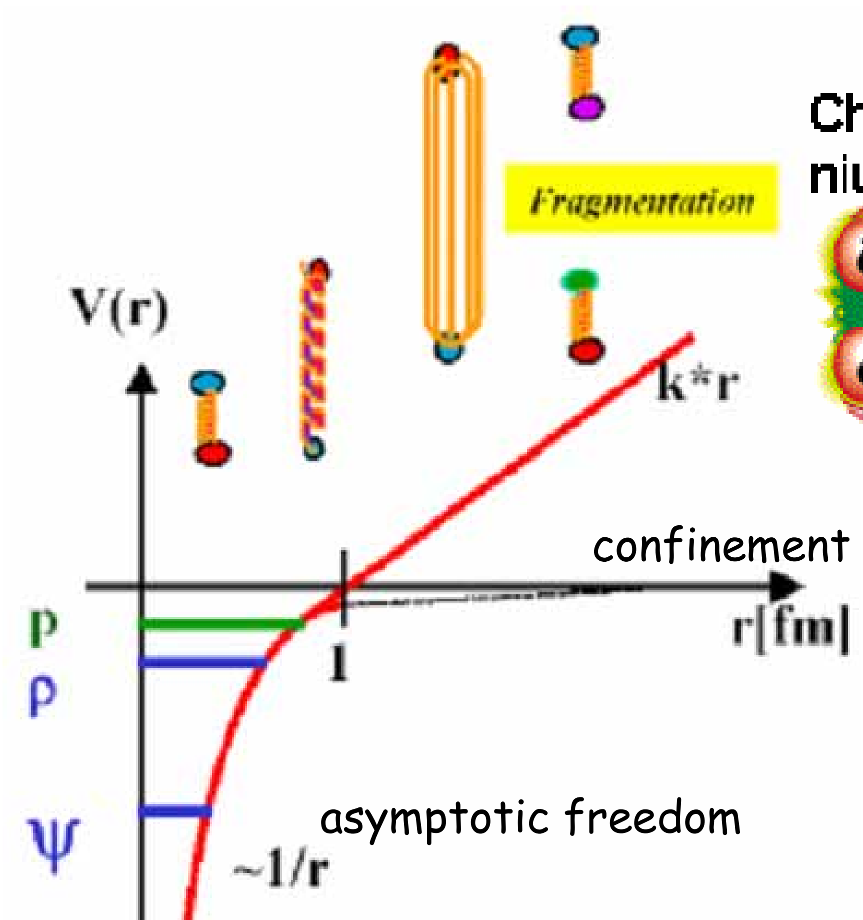


confinement limit:

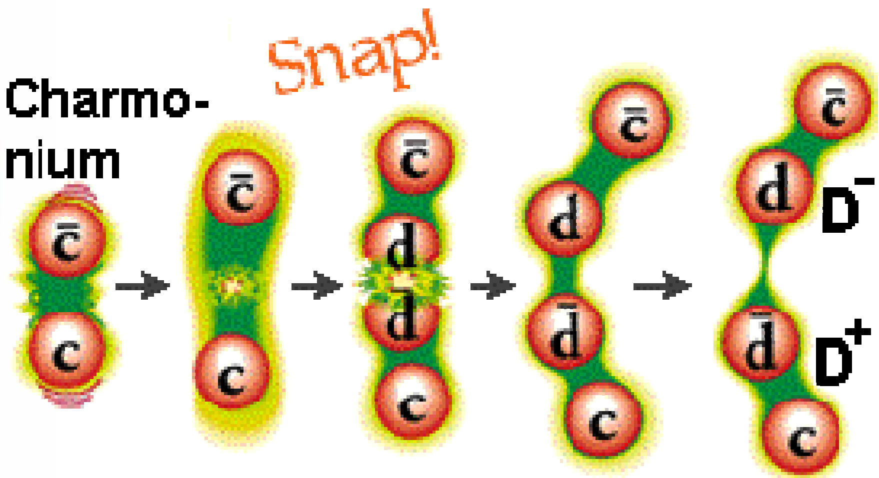


- Die zugrundeliegenden Theorien sind formal sehr ähnlich!

5.3 Das effektive Potential für $q\bar{q}$-Wechselwirkungen

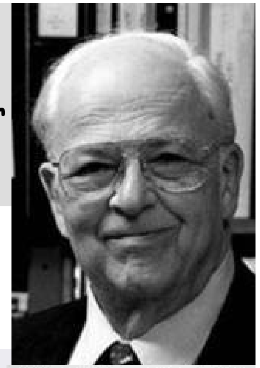


$$V \approx -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r} + k \cdot r$$

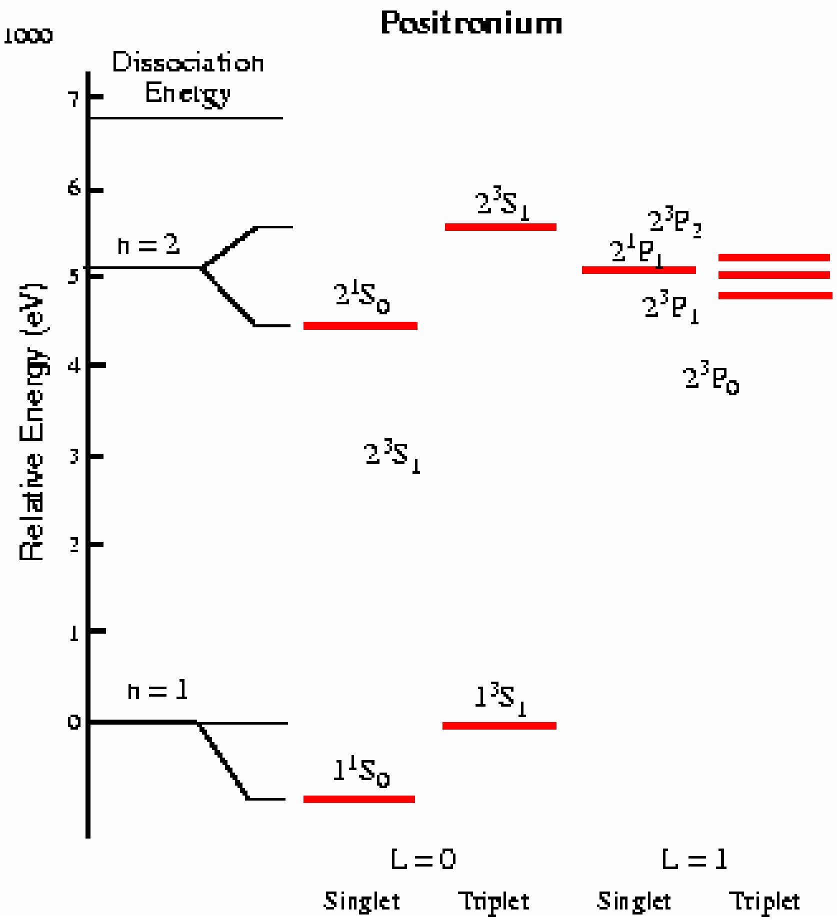


5.3 Spektroskopie schwerer Quarks

Burton Richter

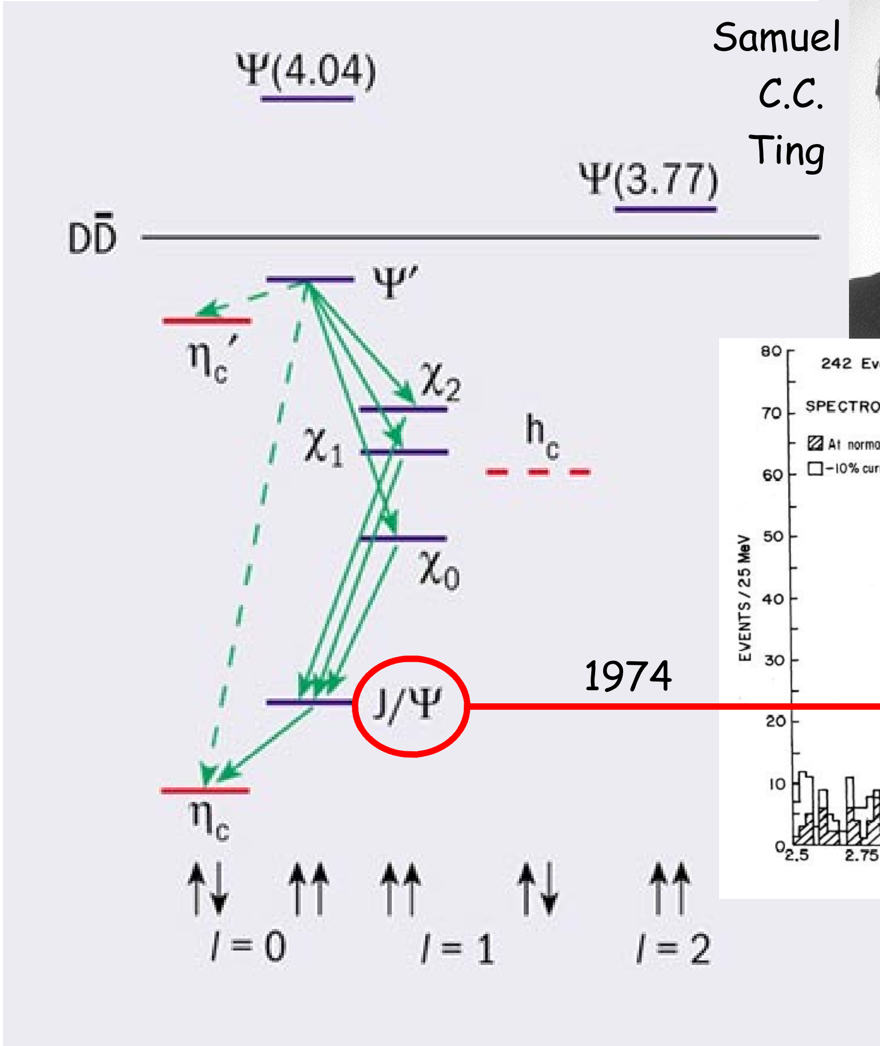


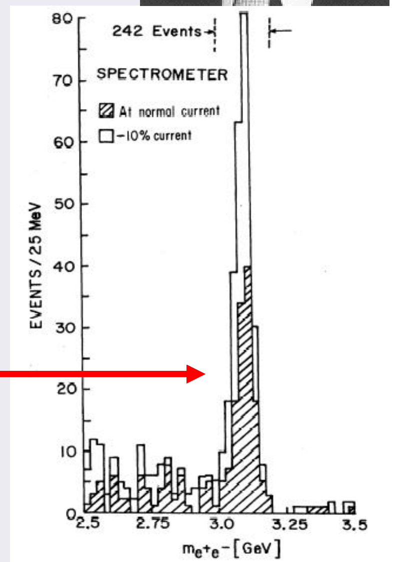
Positronium = gebundenes e^+e^- - System



Charmonium = gebundenes System eines $c\bar{c}$ Quark-Paares (Nobel 1976)

Samuel C.C. Ting





5.3 QCD: Laufende Kopplung – nicht-pert. QCD

für Q^2 (< 1 GeV^2) → Λ^2: α_S → groß

→ Multi-Gluonenaustausch

→ „nicht-perturbativer" Bereich, Rechnungen mit Gittereichtheorie oder phänomenologische Modelle (z.B- Kernphysik)

→ Selbstwechselwirkung der Gluonen (farb-magnetische Anziehung) analog zu „Expander" bildet sich „String" aus

$$V(r) = -\frac{4\alpha_{eff}}{3\cdot r} + \sigma\cdot r \quad mit\ \sigma \approx 0.9\ GeV / fm$$

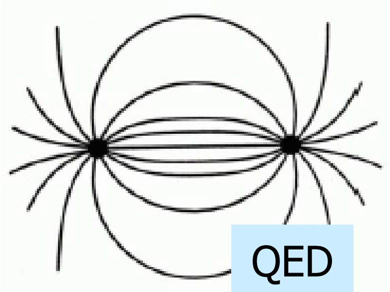
→ Confinement (keine freien Quarks/Gluonen),

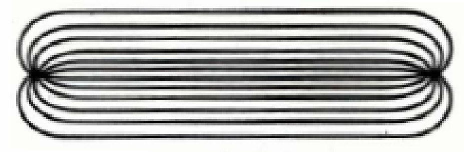
→ Kernkräfte = QCD-RestWW (van der Waals)

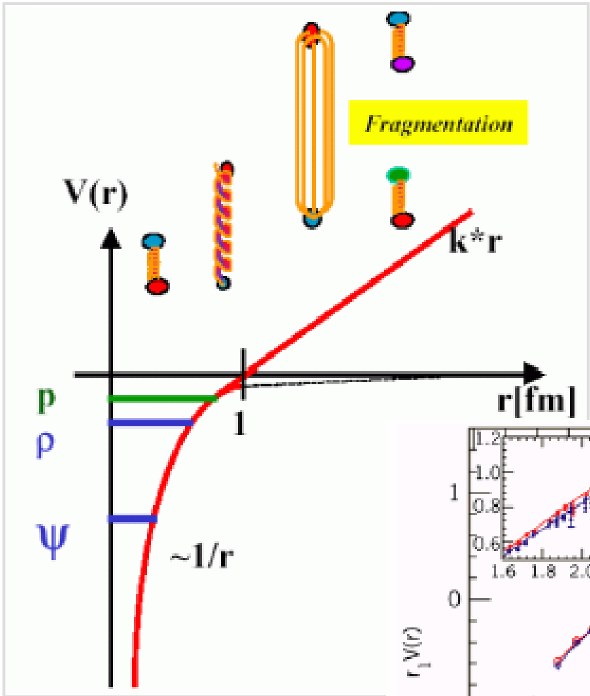
→ komplexe (z.Zt. nicht berechenbar) Struktur der Hadronen

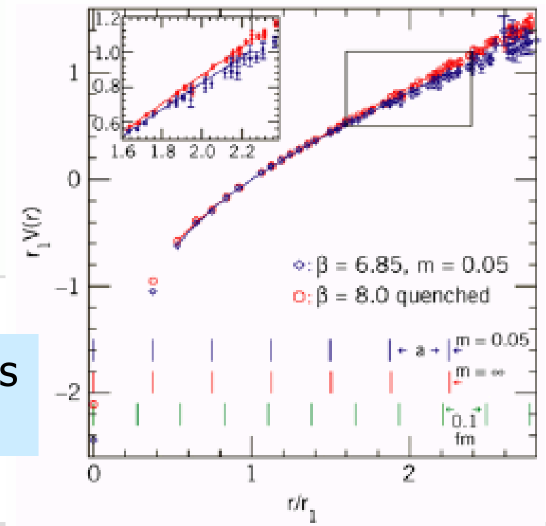
→ sobald (z.B. in hochenergetischer WW) Ab-stand Quark-Antiquark > 1 fm bilden sich neue Quark-Antiquark-Paare → Quarks und Gluonen fragmentieren Teilchenbündel „Jets"

nicht-pert. Problem tritt immer bei Hadronen auf


QED


QCD





QCD-Potential aus Gitterrechnungen