Einführung in die Teilchenphysik, SS 2016
Übungsblatt 8

Frank Tackmann

Abgabe: Freitag, 17.06.2016, zu Beginn der Vorlesung

1) Laufende Kopplung in QED (7 Punkte)

Die physikalische elektromagnetische Kopplung ist definiert durch $\alpha_{\rm em}(\mu) = \alpha_{\rm em}(0)\big[1+I(\mu)\big]$, wobei $I(\mu)$ den Gesamtbeitrag zur Photon-Vakuumpolarisation darstellt. Der 1-loop Beitrag zu $I(\mu)$ von einem einzelnen Dirac Fermion mit Masse m_f ist

$$I_1(\mu, m_f) = \frac{\alpha_{\rm em}(0)}{3\pi} \ln \frac{\mu^2}{m_f^2 c^2}\,. \tag{1}$$

a) (2 Punkte) Gegeben $\alpha_{\rm em}(0) = 1/137$, bestimmen Sie $\alpha_{\rm em}(\mu = m_Z c)$ in QED (d.h. einschließlich Elektronen, Muonen, und Tau Leptonen).

b) (2 Punkte) Der führende Beitrag von höheren Ordnungen kommt aus der Iteration des 1-loop Beitrags. Bestimmen Sie $\alpha_{\rm em}(\mu = m_Z c)$ aus $\alpha_{\rm em}(0)$ in QED in dem Sie den gesamten 1-loop Beitrag iterieren und aufsummieren, d.h. benutzen Sie $I = I_1 + I_1^2 + I_1^3 + ...$

c) (3 Punkte) Der experimentell gemessene Wert ist $\alpha_{\rm em}(\mu = m_Z c) = 1/128$. Um diesen zu erreichen, muß auch der QCD Beitrag von quark loops zum Photon Propagator berücksichtigt werden, d.h. $I_1 = I_1^{\rm QED} + I_1^{\rm had}$, wobei $I_1^{\rm had}$ den gesamten QCD Beitrag von allen Quarks enthält. (Dieser ist nicht so einfach berechenbar, da z.B. die Masse der leichten Quarks nicht einfach zu definieren ist.). Bestimmen Sie den QCD Beitrag $I_1^{\rm had}(\mu = m_Z c)$ aus dem gemessenen Wert von $\alpha_{\rm em}(\mu = m_Z c)$ und vergleichen Sie dessen Grösse mit dem QED Beitrag $I_1^{\rm QED}$.

2) Laufende Kopplung in QCD (8 Punkte)

a) (4 Punkte) Die μ-Abhängigkeit der starken Kopplungskonstanten ist gegeben durch

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\alpha_s(\mu) = \beta[\alpha_s(\mu)] \quad \text{mit} \quad \beta(\alpha_s) = -\beta_0 \frac{\alpha_s^2}{2\pi} + \cdots\,, \qquad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f\,. \tag{2}$$

Berechnen Sie $\alpha_s(\mu)$ für beliebiges μ aus dem bekannten (gemessenen) Wert von $\alpha_s(\mu = m_Z c)$. Für $m_Z c = 91.2\,\mathrm{GeV}/c$ und $\alpha_s(m_Z c) = 0.118$, bestimmen Sie die Werte für μ (in GeV/c) bei der $\alpha_s(\mu) = 1$ und bei der $\alpha_s(\mu) = \infty$ ist. (Da das top quark schwerer ist als m_Z, ist die relevante Zahl von Quarks hier $n_f = 5$ für u, d, s, c, b Quarks.)

b) (4 Punkte) Für praktische Zwecke ist $\mu = 1\,\mathrm{GeV}/c$ die niedrigste Skala bei der eine Entwicklung in $\alpha_s(\mu)$ gerade noch möglich ist. Berechnen Sie $\alpha_s(1\,\mathrm{GeV}/c)$ unter Berücksichtigung, dass die b-quark und c-quark Massen $m_b = 4.8\,\mathrm{GeV}/c^2$ und $m_c = 1.4\,\mathrm{GeV}/c^2$ sind. Dafür ist es ausreichend ein Quark mit Masse m_q für $\mu > m_q c$ in Gleichung (2) zu berücksichtigen und für $\mu < m_q c$ wegzulassen. Das geschieht indem Sie die Lösung von Gl. (2) wiederholt in mehreren Schritten mit dem jeweiligen Wert für n_f benutzen.