Einführung in die Teilchenphysik, SS 2016
Übungsblatt 6*

Frank Tackmann

Abgabe: Freitag, 03.06.2016, zu Beginn der Vorlesung

---

* Diese Übung hat in etwa den Umfang von 2 normalen und gibt deshalb die doppelte Punktzahl. Sie haben 3 Wochen Zeit zur Bearbeitung (die Sie auch gut nutzen sollten!). Sie haben die Möglichkeit im Übungsteil am 27.05. Fragen zu den Aufgaben zu stellen.

In dieser Übung betrachten wir den Prozess $e^+(k_a)\, e^-(k_b) \to q(p_1)\, \bar{q}(p_2)\, g(p_3)$. Setzen Sie für die gesamte Übung alle Fermionmassen auf Null, $m_e = m_\mu = m_q = 0$.

1) Kinematik und Phasenraum (15 Punkte)

a) Betrachten Sie den $2 \to 3$ Phasenraum für $k_a + k_b = q = p_1 + p_2 + p_3$ (mit $k_i^2 = p_i^2 = 0$). Zeigen Sie zunächst, dass 5 unabhängige kinematische Variablen nötig sind, um den kinematischen Endzustand vollständig zu beschreiben. Drei von diesen sind (irrelevante) Winkel, die die Orientierung der Ebene bestimmen in der die 3 Impulse $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, $\vec{p_3}$ liegen. Für die restlichen 2 unabhängigen Variablen definieren wir die Lorentz-invarianten Grössen

$$x_1 = \frac{2p_1 \cdot q}{q^2}\,, \qquad x_2 = \frac{2p_2 \cdot q}{q^2}\,, \qquad x_3 = \frac{2p_3 \cdot q}{q^2}\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2\,, \qquad 0 \le x_i \le 1\,. \tag{2}$$

Hinweis: Am einfachsten ist es, ein festes (praktisches) Bezugssystem zu wählen, und die Relationen in diesem zu zeigen. Da die x_i Lorentz-invariant sind, müssen die Relationen dann auch in einem beliebigen Bezugssystem gelten.

b) Zeigen Sie, dass im Schwerpunktsystem der Kollision (d.h. im System in dem $\vec{q} = 0$ ist) die folgenden Grenzwerte gelten:

- $x_1 \to 1$: p_2 und p_3 sind collinear, d.h. haben die gleiche Richtung, und sind entgegengesetzt der p_1 Richtung.
- $x_2 \to 1$: p_1 und p_3 sind collinear und entgegengesetzt der p_2 Richtung.
- $x_3 \to 1$: p_1 und p_2 sind collinear und entgegengesetzt der p_3 Richtung.
- $x_1 \to 1$ und $x_2 \to 1$ erfordert $p_3^0 \to 0$ unabhängig von der Richtung von $\vec{p_3}$.

c) Wählen Sie x_1 und x_2 als die restlichen zwei unabhängigen Variablen und zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\Phi_3 &\equiv \int \frac{\mathrm{d}^4 p_1}{(2\pi)^3}\,\theta(p_1^0)\delta(p_1^2)\,\frac{\mathrm{d}^4 p_2}{(2\pi)^3}\,\theta(p_2^0)\delta(p_2^2)\,\frac{\mathrm{d}^4 p_3}{(2\pi)^3}\,\theta(p_3^0)\delta(p_3^2)\,(2\pi)^4\delta^4(q - p_1 - p_2 - p_3)\\ &= \frac{q^2}{128\pi^3}\int \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\theta(1 - x_1)\,\theta(1 - x_2)\,\theta(x_1 + x_2 - 1)\,.\end{aligned} \tag{3}$$

(Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung. Der Trick ist immer geschickt zu wählen welche δ-Funktion gegen welches Integral einzulösen.)

2) Wirkungsquerschnitt (15 Punkte)

Der differentielle Wirkungsquerschnitt in x_1 und x_2 ist gegeben als

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2} = \sigma_0\, N_C Q_q^2 \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}\,, \qquad \sigma_0 = (\hbar c)^2 \frac{4\pi\alpha_{\mathrm{em}}^2}{3E_{\mathrm{cm}}^2}\,. \tag{4}$$

Die Herleitung von Gl. (4) ist im Prinzip nicht kompliziert aber etwas umfangreich. Um die kinematische Abhängigkeit in x_1 und x_2 herzuleiten, können wir ein paar Vereinfachungen machen, indem wir die Farbladung ignorieren und die einlaufenden e^+e^- ignorieren. Betrachten Sie dazu den QED Prozess $\gamma^*(q) \to \mu^-(p_1)\mu^+(p_2)\gamma(p_3)$, wobei das einlaufende Photon off-shell ist mit Impulsquadrat $q^2 = E_{\mathrm{cm}}^2$.

a) Zeichnen Sie die zwei führenden tree-level Diagramme für diesen Prozess und bestimmen Sie die dazugehörige Amplitude $i\mathcal{M}(\gamma^*(q) \to \mu^-(p_1)\mu^+(p_2)\gamma(p_3))$.

- Das einlaufende Photon γ^* trägt einen Polarisationsvektor $\varepsilon_\mu(q)$ bei, der mit dem γ^μ des dazugehörigen Vertex kontrahiert ist. (Der Fakt dass dieses Photon $q^2 \neq 0$ hat ist hierfür egal.)
- Das auslaufende Photon trägt einen Polarisationsvektor $\varepsilon_\nu^*(p_3)$ bei, der mit dem γ^ν des dazugehörigen Vertex kontrahiert ist.
- Vorsicht mit Vorzeichen. In dem Diagramm in dem das auslaufende Photon an das μ^+ koppelt ist der Impuls im Dirac-Propagator entlang der Fermionrichtung $-(p_2 + p_3)$.

b) Nehmen Sie jetzt das Betragsquadrat der obigen Amplitude, summieren Sie über alle Spins und Polarisationen, und schreiben Sie das Ergebnis als Funktion von x_1 und x_2. Sie sollten genau die Abhängigkeit von x_1 und x_2 wie in Gl. (4) wiederfinden.

- Gute Organisation aller Terme ist absolut wichtig hier. Eine Möglichkeit ist zunächst alles auf $p_1 \cdot p_3$, $p_2 \cdot p_3$, und $p_1 \cdot p_2$ hin zu vereinfachen und ganz am Ende diese durch x_1, x_2, and q^2 auszudrücken (wobei das q^2 am Ende rausfallen wird).
- Für die Spin- und Polarisationssummation benutzen Sie die Vollständigkeitsrelationen:

$$\sum_{\text{spins}} u(p)\bar{u}(p) = \not{p}\,, \qquad \sum_{\text{spins}} v(p)\bar{v}(p) = \not{p}\,, \qquad \sum_{\text{pol.}} \varepsilon_\mu^*(p)\varepsilon_\nu(p) = -g_{\mu\nu} \tag{5}$$

- Sie sollten Terme mit je zwei verschiedenen Strukturen von Dirac-Spuren finden, welche Sie mit folgenden Relationen vereinfachen können:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\} &= 4(p_1 \cdot p_2)\,, \\
\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_3\not{p}_2\not{p}_3\} &= 8(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_3) - 4(p_1 \cdot p_2)p_3^2\,, \\
\gamma_\mu\not{p}\gamma^\mu &= -2\not{p}\,, \\
\gamma_\mu\not{p}_1\not{p}_2\gamma^\mu &= 4p_1 \cdot p_2\,, \\
\gamma_\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2\gamma^\mu &= -2\not{p}_2\gamma^\nu\not{p}_1\,.
\end{aligned} \tag{6}$$