Einführung in die Teilchenphysik, SS 2016
Übungsblatt 5

Frank Tackmann

Abgabe: Freitag, 13.05.2016, zu Beginn der Vorlesung

1) Stromerhaltung (3 Punkte)

Der Strom für das Dirac-Feld $\psi(x)$ eines spin-$\frac{1}{2}$ Teilches mit Masse m ist gegeben durch

$$j^\mu(x) = -e\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\,. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass $j^\mu(x)$ reell ist, d.h. $(j^\mu)^\dagger = j^\mu$.
(Hinweis: Denken Sie daran, dass $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ und $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.)

b) Ausgehend von der Dirac-Gleichung für $\psi(x)$, leiten Sie die Dirac-Gleichung für das konjugierte Feld $\bar{\psi}(x)$ her.

c) Zeigen Sie, dass der Strom $j^\mu(x)$ erhalten ist, d.h., er erfüllt $\partial_\mu j^\mu = 0$.

2) Spinor-Gymnastik (8 Punkte)

In der Pauli-Dirac Darstellung gilt

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{2}$$

wobei σ^i die Pauli-Matrizen sind

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \tag{3}$$

Die Lösungen der Dirac-Gleichung in dieser Darstellung sind gegeben durch die Spinore

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{E/c + mc}\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{1}{E/c+mc}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \tag{4}$$

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{E/c + mc}\begin{pmatrix} \frac{1}{E/c+mc}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\tilde{\chi}^{(s)} \\ \tilde{\chi}^{(s)} \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \tilde{\chi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad \tilde{\chi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{5}$$

mit $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ and $E/c \equiv E_{\vec{p}}/c = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass $u(\vec{p})$ and $v(\vec{p})$ die Impuls-Dirac-Gleichungen $(\not{p} - mc)u(\vec{p}) = 0$ und $(\not{p} + mc)v(\vec{p}) = 0$ erfüllen.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2$ gilt. Dann reduziert sich der Rest auf das multiplizieren von effektiven 2x2 Matrizen.)

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\bar{u}(\vec{p})\,u(\vec{p}) = 2mc$ und $\bar{v}(\vec{p})\,v(\vec{p}) = -2mc$.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p}) = 2p^\mu$.

d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\sum_{s=1,2} u^{(s)}\bar{u}^{(s)} = \not{p} + mc$

3) Helizität (4 Punkte)

Der Helizitätsoperator ist gegeben durch

$$H = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} \qquad \text{mit} \qquad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass für $\vec{p} \equiv (0, 0, p)$ entlang der z-Richtung, die vier Lösungen $u^{(1)}(\vec{p})$, $u^{(2)}(\vec{p})$, $v^{(1)}(\vec{p})$, $v^{(2)}(\vec{p})$ aus Gleichungen (3) und (4) Eigenzustände von H sind, und bestimmen Sie deren Eigenwerte.