

4. Partielle Differentialgleichungen

Literatur: Riech, Kap 15

Lang, Pucher Kap 16

Courant + Hilbert, Methods in Math. Physics, (Wiley 1962)

***** Farlow, Partial Differential Eq. for Scientists and Engineers
(Wiley 1982) § 13

4.1. Definition + allgemeine Eigenschaften

partielle Differentialgleichung:

Gleichung für Funktionen $u(x_1, x_2, \dots, x_m)$

der Form

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \dots) = 0$$

$\Rightarrow$ sehr häufig das Resultat der math. Formulierung
eines physikalischen Problems.

Beispiele: a) $\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ Poisson-Gleichung

$$\text{d.h. } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z)$$

$$\text{b) } \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{c \cdot \rho} \Delta T(\vec{r}, t) \quad \begin{array}{l} \text{"Fourier"-Gleichung} \\ \text{(Wärmeleitung)} \end{array}$$

c) Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

d) Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$

Nomenklatur: Ordnung = höchste vorkommende
Ableitung (Beisp. a)-d) alle
2. Ordnung)

lineare Dgl: F ist linear in allen Ableitungen
(Beisp. a)-d) sind linear)

Lösungen: Die Lösungsmannigfaltigkeit ist viel größer
als bei gewöhnlichen Dgl!

gewöhnl. Dgl n-ter Ordnung: n willkürliche Konstanten

part. Dgl n-ter Ordnung: n willkürliche Funktionen!

diese Fkt. hängen von $m-1$
Variablen ab (m = Anzahl der
Variablen der gewählten Fkt)

Beispiel:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \quad (*)$$

Variablentransformation $u = y + cx$, $v = y - cx$

$$\Rightarrow y = \frac{u+v}{2}, \quad x = \frac{u-v}{2c} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0}$$

$$\text{denn: } \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(-\frac{1}{2c}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \left(-\frac{1}{2c}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4c} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$+ \frac{1}{4c} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \checkmark$$

$$f = f(u, v) \quad \Rightarrow \quad f = w_1(u) + w_2(v)$$

für beliebige Funktionen $w_1(y+cx)$ und $w_2(y-cx)$

- Die w_i werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.
- Wenn $x = t$ (Zeit) $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
 $\Rightarrow$ Wellengleichung (z.B. schwingende Saite)

4.2. Separation der Variablen

- häufig erfolgreiches Lösungsverfahren für lineare partielle Differentialgleichungen 2er Ordnung.

Idee: Wenn $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist

$\Rightarrow$ Lösungsansatz: $f(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$
 (Bernoulli)

$\Rightarrow$ (häufig) n gewöhnliche Differentialgleichungen.

Beispiel: schwingende Saite

(hier nur skizziert, $\Rightarrow$ Übungsaufgabe)

Seite: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$y(x, t)$ = Auslenkung

Aufangsbedingungen: $y(x, 0) = f(x)$ Anfangsauslenkung

$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ Anfangsgeschwindigkeit

$x(0, t) = y(l, t)$ (fest eingespannt, Länge l)

Ansatz: $y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X(x) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T(t) \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$

einsetzen in Dgl $\Rightarrow X \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad | /XT$

$\Rightarrow \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$

aus $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \text{const}$

und $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{const}$

die Konstante muß in beiden Fällen gleich sein
(const =: $-\lambda^2$)

⇒ Reduzierung des Problems auf 2 gewöhnliche
Dgl:

$$(1) \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \text{und}$$

$$(2) \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 \lambda^2 T = 0$$

Allg. Lösung von (1): $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$

Konstanten aus Randbedingungen: $\boxed{\lambda_n = \frac{\pi n}{l}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
"Eigenwerte"

Lösung von (2) zu jedem n : $T(t) = A_n \cos \frac{c\pi n t}{l} + B_n \sin \frac{c\pi n t}{l}$

Bestimmung der Koeffizienten A_n, B_n (Oberschwingungen)
durch Fourieranalyse der Randbedingungen
 $f(x), g(x)$ (Details: s. z.B. Riech)
Kap 15

Dieses Verfahren funktioniert auch in komplizierteren Fällen:

z.B.: quadratische Membran: $z(x, y, t)$

- Runde Membran: $\Rightarrow$ Zylinderkoordinaten,

$$z(\rho, \varphi, t)$$

$\Rightarrow$ Besselfunktionen

- Zustandswellenfunktion im H-Atom

Kugelkoord.

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(r, \theta, \varphi, t)$$

$\Rightarrow$ Kugelflächenfunktionen für

$\theta - \varphi$ - Abhängigkeit

(= "Orbitale")