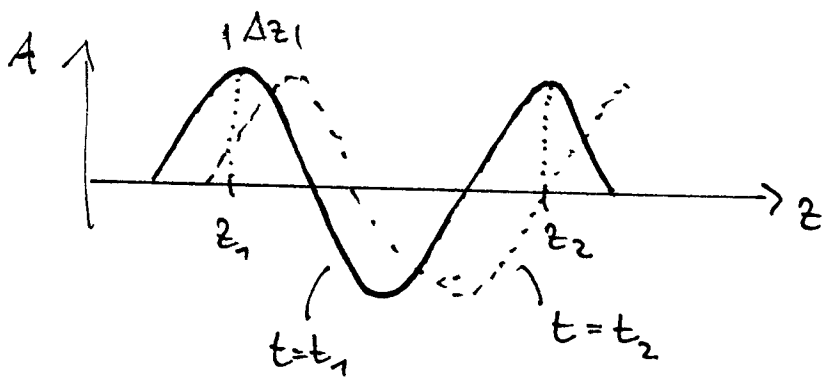


3. Wellen

Motivation aus der Mechanik: gekoppelte Schwingung benachbarter Massenpunkte $\rightarrow$ Ausbreitung der Schwingung im Raum: Wellen

- Seilwellen, Wasserwellen, Schallwellen, Elektro-magnetische Wellen, später: (QM) Wellenfunktion zur Beschreibung von Teilchen.

3.1. Harmonische ebene Wellen



Wellenlänge: Abstand zweier äquivalenter Punkte im Raum $\lambda = z_2 - z_1$

Wellengeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit):

$$v = \frac{\Delta z}{t_2 - t_1} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu = \frac{\lambda}{2\pi} \omega = \frac{\omega}{k}$$

k : Wellenzahl

$$k := \frac{2\pi}{\lambda}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$\Rightarrow$ Welle ist Funktion von $(\omega t - kz)$

denn für beliebige z, t muß $A(z, t) = A(z - vt, 0)$ sein.

$$\Rightarrow \boxed{A(z, t) = A_0 \sin(\omega t - kz, 0)}$$

Komplexe Schreibweise: $A(z, t) = A_0 e^{i(\omega t - kz)}$

für $A_0 \in \mathbb{R}$ ergibt $\text{Im}(A_0 e^{i(\omega t - kz)})$ das obige Ergebnis.

Betrachte $A(z, t)$ jetzt als $A(\vec{r}, t)$

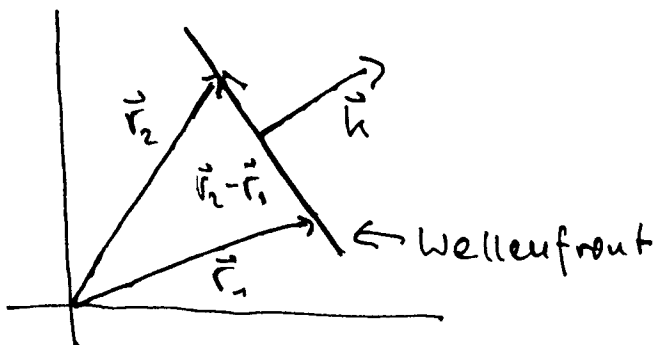
$\Rightarrow$ für feste Zeit t_0 ist die Amplitude A für alle Punkte der Ebene $z = \text{const}$ gleich $\Rightarrow$ Ebene Welle

Ebene Wellen mit beliebiger Ausbreitungsrichtung:

Wähle bel. Vektor $\vec{k}$:

$$A(\vec{r}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$\Rightarrow$ Wellenfront gegeben durch alle Punkte mit $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$



$$\Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$$

für alle Punkte der Wellenfront

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \vec{k} \cdot \vec{r}_1 = \text{const.}$$

Der Wellenvektor $\vec{k}$ zeigt in Ausbreitungsrichtung
 der Wellenfront und $\boxed{|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}}$

3.2. Wellengleichung

Betrachte beliebige Welle $A(\vec{r}, t) = f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial u} k_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} k_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial u} k_z \quad (u = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} k_x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} k_y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} k_z^2} \quad (1)$$

$$\text{und } \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \omega, \quad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \omega^2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{mit } \omega = v|\vec{k}| \Rightarrow$$

$$\Delta f \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\omega^2}{v^2} \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} \quad \underline{\text{Wellengleichung}}$$

- W.G. beschreibt Wellen allgemein (nicht nur harmonische, ebene Wellen)
- W.G. ist partielle Differentialgleichung
→ kein allgemeines, einfaches Lösungsverfahren
- Bei partiellen Differentialgleichungen spielen die Anfangsbedingungen eine entscheidende Rolle.
⇒ ebene Wellen, Kugelwellen, stehende Wellen, etc.
alle Lsg. der gleichen Dgl. mit unterschiedl. Anfangsbedingungen.

3.3. Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Häufig: $v_{ph} = v_{ph}(\lambda)$ Funktion der Wellenlänge

z.B. Lichtwellen in Glas: $v_{ph} = c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_0 n(\omega)} = \frac{c_0}{n(\omega)}$

$n(\omega)$: Brechungsindex ⇒ Dispersion

Wellenpaket: Superposition unendl. vieler harmon. Wellen der Frequenzen $\omega_m \pm \Delta\omega$
 ω_m : mittlere Frequenz

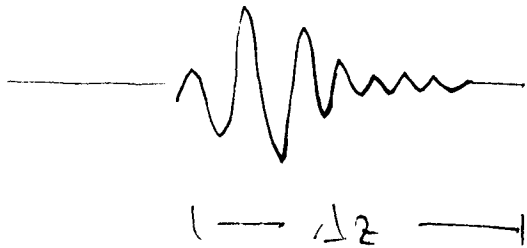
$\Delta\omega$: Frequenzbreite

räumliche Ausdehnung $\Delta z \sim \frac{1}{\Delta\omega}$

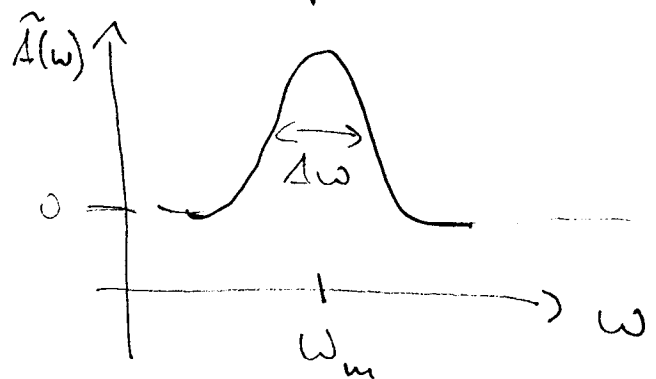
math. Beschreibung:

$$A(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\omega$$

Wellenpaket



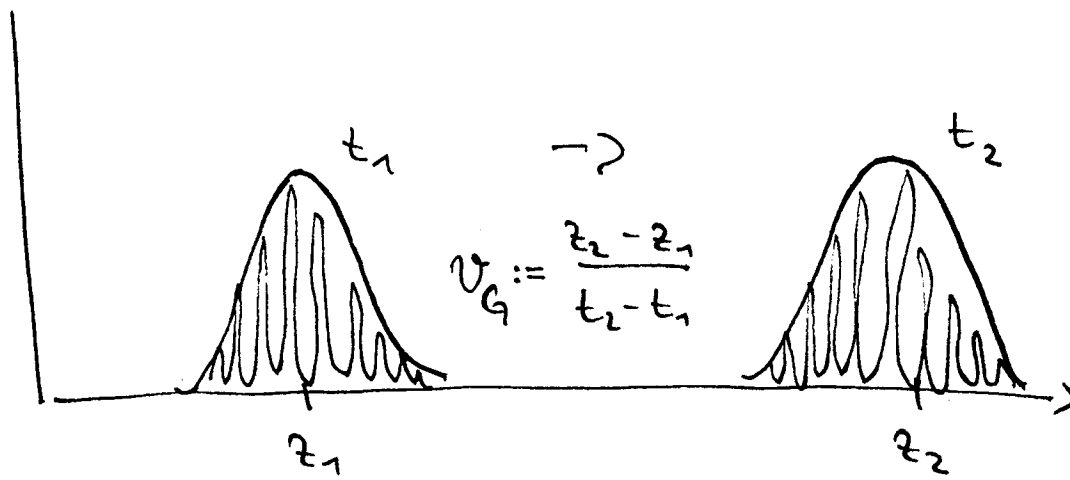
Frequenzspektrum



Frequenzspektrum: Fouriertransformierte des Wellenpakets:

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} dt$$

Gruppengeschwindigkeit: Das Maximum eines Wellenpaketes bewegt sich nicht (notwendig) mit der Phasengeschwindigkeit der Welle!



$$v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{\text{Gruppe}} = \frac{d\omega}{dk}$$

Herleitung: Betrachte Wellenpaket:

$$A(z, t) = \int \tilde{A}(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega$$

setze $\omega = \omega_0 + \mu$ μ klein $\Rightarrow$

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \mu \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} + \dots$$

$$\Rightarrow A(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0)z)} \cdot \int \tilde{A}(\omega) e^{i\mu(t - z \frac{dk}{d\omega}|_{\omega_0})} d\mu$$

ebene Welle
mit ω_0

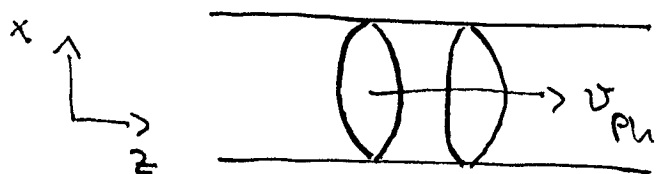
zeit abhängige Amplitude

$$\tilde{A}(t - z v_G^{-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_G = \frac{d\omega}{dk}}$$

$$= \tilde{A}(z - v_G t)$$

Beispiel: elektrische Wellen zw. planparallelen Platten



$$\vec{E} = -2\vec{E}_0 \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)$$

$\Rightarrow$ ebene Welle in z-Richtung mit der Phasengeschw.

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k_z} \quad . \quad \text{Die Lichtgeschwindigkeit ist}$$

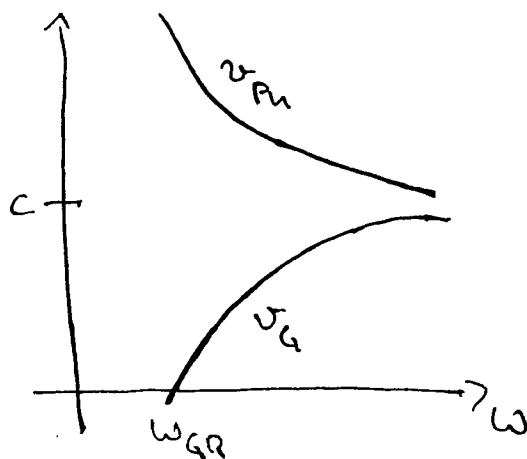
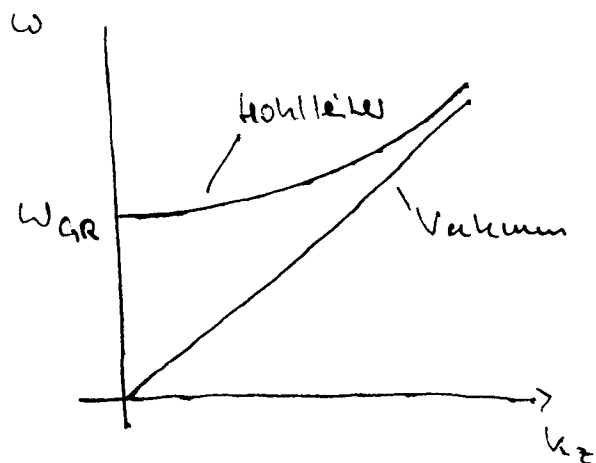
$$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \Rightarrow \boxed{v_{Ph} = \frac{c}{k_z} \sqrt{k_z^2 + k_x^2} \geq c !}$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist: $(k = |\vec{k}|)$

$$v_G = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{d\omega}{dk} \frac{dk}{dk_z} = c \cdot \frac{k_z}{k} = \frac{c^2}{\omega} k_z = \frac{c^2}{v_{Ph}} \leq c !$$

Es gilt also $\boxed{c^2 = v_G \cdot v_{Ph}}$

Hohlleiter zeigen Dispersion:



3.4. Vektorwertige Wellen

Bisher: Wellen = skalare Amplitude als Fkt. von $(\vec{r}, t)$

Jetzt: Amplitude ist Vektor: $\vec{F}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} F_x(\vec{r}, t) \\ F_y(\vec{r}, t) \\ F_z(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ jede Komponente löst Wellengleichung:

$$\Delta \vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} \quad \text{heißt, da } \beta$$

die drei part. Dgl.

$$\begin{aligned} \Delta F_x(\vec{r}, t) &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2} \\ \Delta F_y(\vec{r}, t) &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F_y}{\partial t^2} \\ \Delta F_z(\vec{r}, t) &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \left(\Delta \vec{A} \equiv \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} \right)$$

Die Randbedingungen können aber für jede Komponente unterschiedlich sein $\Rightarrow$ unterschiedl. Lösungen.

Beispiel: Elektromagnetische Wellen (s. Physik-Vorlesung)
aus den Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$\Rightarrow$ Wellen mit Geschwind. $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

(eine) Lösung: ebene, harmonische Welle:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{und}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Zusammenhang zwischen Ausbreitungsrichtung und Richtung des Feldes: betrachte

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = \\ &= -k_x E_x - k_y E_y - k_z E_z = \underline{-\vec{k} \cdot \vec{E}} \end{aligned}$$

nach Maxwellgl. 1 ist $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ im ladungsfreien Raum $\Rightarrow$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \boxed{\vec{k} \perp \vec{E}} \quad \text{im Vakuum!}$$

3.5. Polarisation

Betrachte ebene elektrische Welle in z-Richtung:

$$k = k_z; \quad E_z = 0 \quad (\text{wg. } \vec{k} \perp \vec{E}):$$

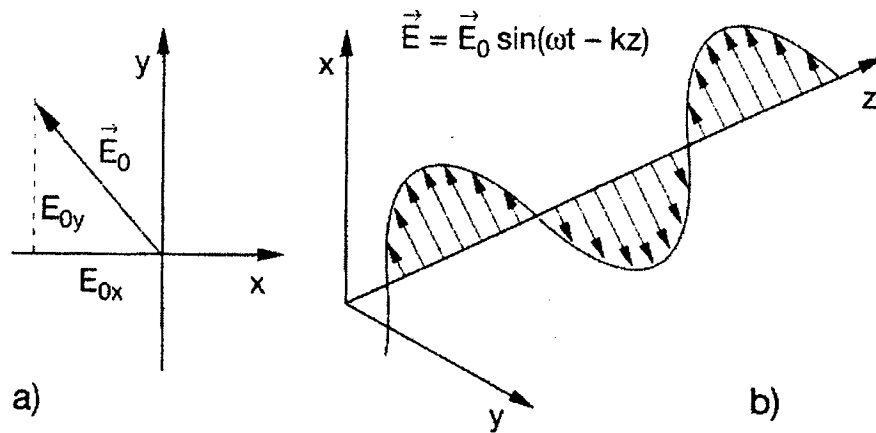
$$E_x = E_{0x} e^{i(\omega t - kz)}$$

$$E_y = E_{0y} e^{i(\omega t - kz + \varphi)}$$

φ : Phasenverschiebung
zw. E_x und E_y

1.) $\varphi = 0$: lineare Polarisation

$\Rightarrow \vec{E}$ -Vektor ändert seine Richtung (betragsmäßig)
nicht



2. $\varphi = \frac{\pi}{2}$: zirkularpolarisation

$$\Rightarrow E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

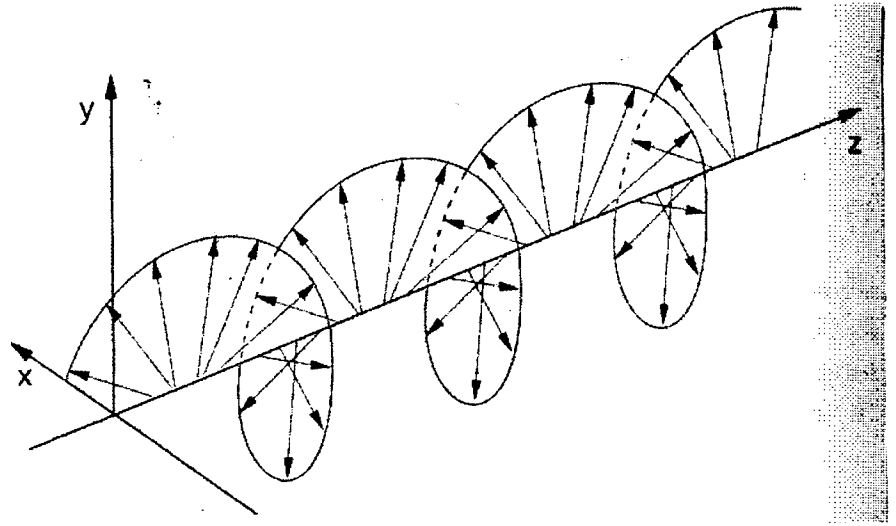
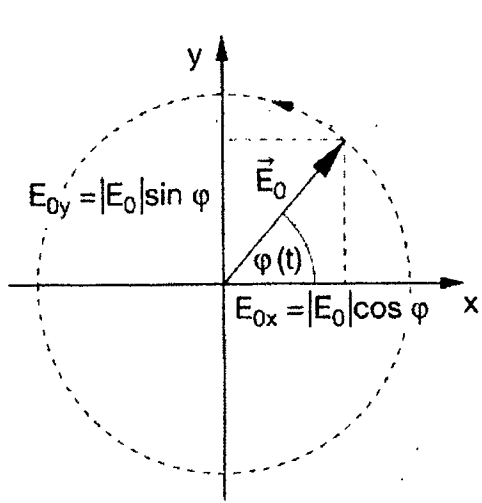
$$E_y = E_0 e^{i(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})}$$

(wenn $E_{0x} = E_{0y} = E_0$)

$$\text{Betrachte } \vec{E}(0, t) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$$

$$= E_0 (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

$\Rightarrow \vec{E}$ -Vektor beschreibt Kreis i.d. x-y-Ebene



3. elliptische Polarisation

wenn $E_{0x} \neq E_{0y}$ oder $\varphi \neq 90^\circ$ und $\varphi \neq 0^\circ$

$\Rightarrow \vec{E}$ beschreibt Ellipse

4. unpolarisierte Welle

Überlagerung vieler Wellen mit (statistisch verteilte) beliebiges Polarisation (statist. Entstehungsprozess, z.B. spontane Emission von Atomen)

(im Gegensatz zu induziertes Emission)

$\Rightarrow$ alle Atome in Phase (Laser)

$\Rightarrow$ polarisiertes Licht