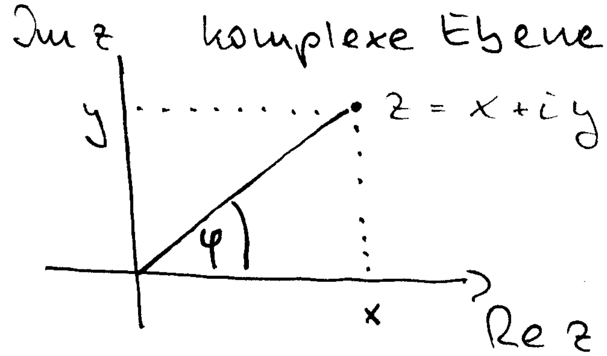
## 2.6. Einschub: Wiederholung komplexe Zahlen

$\mathbb{C}$: $\quad z = x + iy \qquad \mathrm{Re}(z) = x \qquad \mathrm{Im}(z) = y$

Paar (2-Tupel reeller Zahlen) $\qquad x, y \in \mathbb{R}$

Physik: häufig gleichzeitige Beschreibung von Amplitude + Phasenlage einer Schwingung.

komplexe Ebene




$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z z^* \qquad (z^* = x - iy$$

komplex konjugierte zu $z$)

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z z^*} = \frac{z^*}{|z|^2}}$$

<u>Phase</u>: $\qquad \varphi = \operatorname{atan} \frac{y}{x} \equiv \arg(z)$ "Argument von z"

<u>Komplexe e-Funktion:</u>

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x \cdot e^{iy}$$

Eulersche Formel:

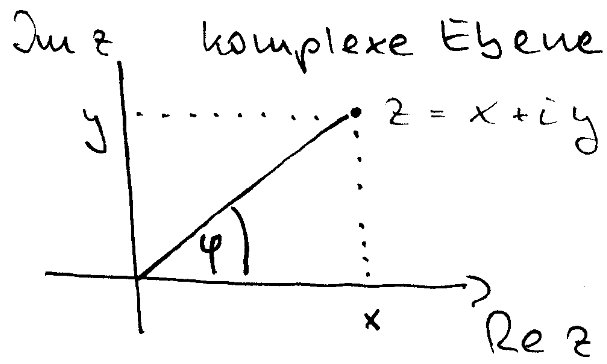
$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

## 2.6. Einschub: Wiederholung komplexe Zahlen

$\mathbb{C}$: $z = x + iy$ $\quad \mathrm{Re}(z) = x \quad \mathrm{Im}(z) = y$

Paar (2-Tupel reeller Zahlen) $\quad x, y \in \mathbb{R}$

Physik: häufig gleichzeitige Beschreibung von Amplitude + Phasenlage einer Schwingung.




$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z z^* \quad (z^* = x - iy$$ komplex konjugierte zu $z$)

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z z^*} = \frac{z^*}{|z|^2}}$$

<u>Phase</u>: $\varphi = \operatorname{atan} \frac{y}{x} \equiv \arg(z)$ "Argument" von $z$

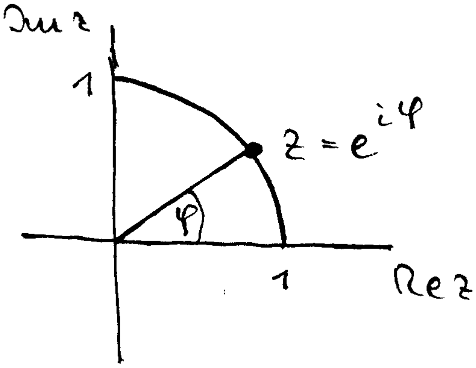
<u>Komplexe e-Funktion:</u>

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x \cdot e^{iy}$$

Eulersche Formel:

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

$\Rightarrow |e^{iy}| = 1$ , $e^x = e^{\operatorname{Re} z} = |e^z|$




$$\boxed{e^{i\pi} = -1} \;!$$

Darstellung einer komplexen Zahl durch ihren Betrag ("Amplitude") und ihr Argument ("Phase")

$$\boxed{z = x + iy = |z| \cdot e^{i\varphi}} \quad \text{mit } \varphi = \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}$$

Beispiel: Additionstheoreme für sin + cos:

z.B. $\quad e^{2ix} = \underbrace{e^{ix} \cdot e^{ix}}$

$$\cos 2x + i \sin 2x = (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos x + i \sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x$$

Vergleich von Realteil und Imaginärteil:

$\Rightarrow$ 1.) $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

2.) $\quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

## 2.7. Fourierreihe in komplexer Schreibweise

Aus der Euler-Beziehung

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{folgt}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)} \qquad \boxed{\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}$$

damit wird die Fourierreihe zu:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}\left(e^{in\pi\frac{x}{l}} + e^{-in\pi\frac{x}{l}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i}\left(e^{in\pi\frac{x}{l}} - e^{in\pi\frac{x}{l}}\right)$$

definiere:

$$a_{-n} \equiv a_n$$

$$b_0 \equiv 0$$

$$b_{-n} \equiv -b_n$$

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi\frac{x}{l}}} \qquad \text{mit Koeffizienten}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-in\pi\frac{x}{l}}\, dx}$$

Die Orthogonalitätsrelation wird damit zu:

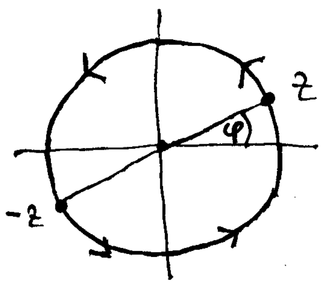
$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{im\pi\frac{x}{\ell}}\cdot e^{-in\pi\frac{x}{\ell}}\,dx = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{i(m-n)\pi\frac{x}{\ell}}\,dx = \delta_{mn}$$

$m=n$: klar, denn $\frac{1}{2\ell}\cdot\int_{-\ell}^{\ell} e^{i0x}\,dx = \underline{1}$ ✓

$m\neq n$: (betrachte $2\ell = 2\pi$)

$\boxed{\varphi \equiv x}$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx \quad (k=m-n)$:




$\Rightarrow \int = 0$

$k=1$: 1 "Runde", allg. $k$ "Runden" ✓

## 2.8. Fouriertransformation

bisher: periodische Funktionen im Intervall $[-\ell,\ell]$

jetzt: nicht-periodische Funktionen:

fassen wir auf als periodisch im Intervall

"$[-\infty,\infty]$"

wenn $f(x)$ den Dirichlet-Bedingungen genügt und absolut integrabel ist, d.h. wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \text{endlich} \quad ,$$

dann läßt sich $f(x)$ schreiben als:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{k})\, e^{ikx}\, dx} \quad \text{mit}$$

$$\boxed{g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx}$$

$g(k)$ heißt die Fouriertransformierte von $f(x)$.

$g(k)$ enthält die gleiche Information wie $f(x)$.

$$f \Leftrightarrow g$$

z.B. wenn $x$ = Ortskoordinate $\Rightarrow k$ = Wellenzahl

$x$ = Zeit $t$ $\Rightarrow k$ = (Kreis-) Frequenz $\omega$

## Herleitung der Fouriertransformierten:

Betrachte die Fourierreihe in komplexer Schreibweise und setze die Definition der $c_n$ ein:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} e^{ik_n x} \int_{-\ell}^{\ell} f(x') e^{-ik_n x'} dx'$$

mit $k_n = \frac{n\pi}{\ell}$ und $\Delta k = k_n - k_{n-1} = \frac{\pi}{\ell}$

Bilde Grenzwert $\ell \to \infty$. Dann folgt

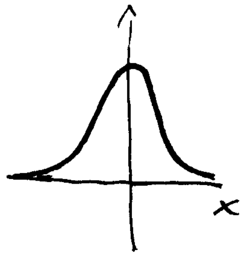
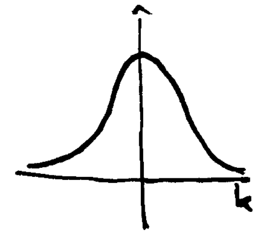
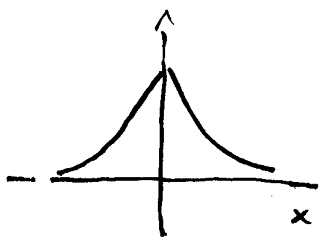
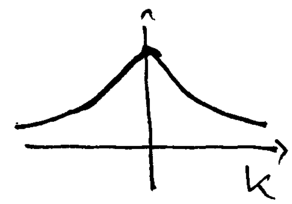
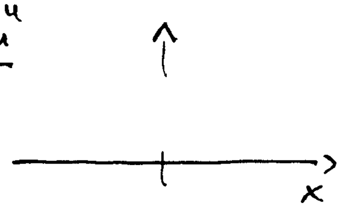
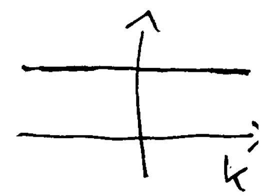
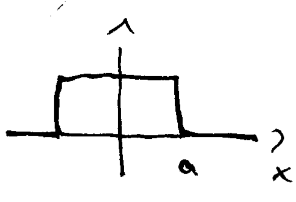
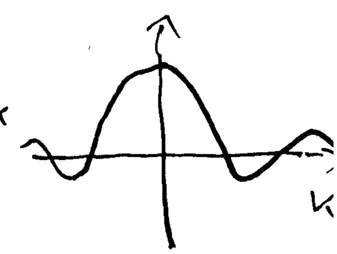
$$\Delta k \to dk$$

$$k_n \to k \text{ (kontinuierlich.)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx'}_{= \sqrt{2\pi}\, g(k)}$$

$\Rightarrow$ q.e.d.

## Beispiele:

| Funktion $f(x)$ | Fouriertransformierte $g(k)$ |
|---|---|
| 1. Gauß: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$  | $g(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}$  |
| 2. Exp.-Funktion: $f(x) = e^{-\lambda\lvert x\rvert}$  | $g(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+k^2}$  |
| 3. Delta-"Funktion": $f(x) = \delta(x)$  | $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underline{\text{const}}$  |
| 4. Kasten-Funktion: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a}} & \lvert x\rvert < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  | $g(k) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\sin ak}{ak}$  |

Beispiel: Frequenzunschärfe eines angeregten Zustandes als Funktion seiner Lebensdauer:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

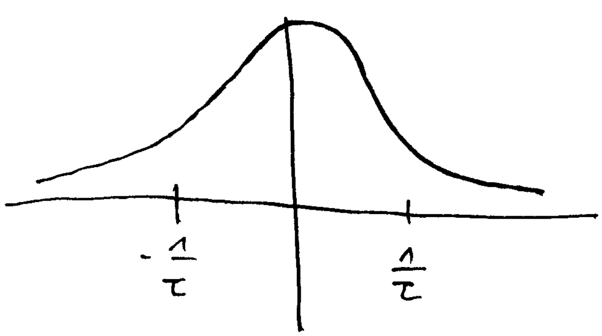
gibt Wahrscheinlichkeit an, daß des Zustand nach der Zeit t noch nicht zerfallen ist.

Fouriertransformierte (Spektralfunktion):

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)t}\, dt$$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} - i\, \frac{\omega}{\omega^2 + \Gamma^2} \right\} \quad \text{mit } \Gamma = \frac{1}{\tau}$$




Breite des Frequenzspektrums $\sim \Gamma \sim \frac{1}{\tau} = \Delta\omega$

mit $E = \hbar\omega \Rightarrow \boxed{\Delta E \cdot \tau \sim \hbar}$ Heisenberg'sche Unschärferelation.