2. Fourier-Reihe + Fourier-Transformation

2.1. Die Fourier-Reihe

Darstellung von beliebigen <u>periodischen</u> Funktionen als Überlagerung von trigonometrischen Funktionen (sin, cos):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$2l$: Periode der Funktion : $f(x) = f(x+2l)$

Berechnung der Koeffizienten a_n, b_n :

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n \in 0,1,2,\dots \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad n \in 1,2,3,\dots \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Spezialfall: $2l = 2\pi$, $\alpha = -\pi$, d.h. $x \in [-\pi, \pi]$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Interpretation 1: "Synthesizer"

Erzeugung einer beliebigen periodischen Funktion durch Wahl der Koeffizienten a_n, b_n.

Interpretation 2: "Frequenzanalysator"

Bestimme "Frequenzanteil" a_i, b_i durch Berechnung des Integrals $a_i = \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) \cos \frac{i\pi x}{l}$ (bzw. b_i analog)

a_i, b_i heißen <u>Spektralkoeffizienten</u>

2.2. Wichtige Eigenschaften

- $\frac{a_0}{2}$ ist der Mittelwert von $f(x)$ im Intervall $\alpha, \alpha+2l$ (= "offset", "baseline", "Gleichspannungsanteil", ...)
- für <u>gerade Funktionen</u> ($f(x) = f(-x)$) enthält die Reihe nur cos-Terme ($b_i = 0$)
- für <u>ungerade Funktionen</u> ($f(x) = -f(-x)$) enthält die Reihe nur sin-Terme ($a_i = 0$)

2.3. Herleitung

d.h. Herleitung der Formel für die Koeffizienten.

Betrachte o.B.d.A. $2l = 2\pi$, $\alpha = 0$.

Multiplikation der Reihe mit $\cos mx$ und Integration:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\, f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos mx\, dx +$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos mx \cos nx + b_n \cos mx \sin nx \right] dx$$

wenn $f(x)$ integrabel und gleichmäßig konvergent (d.h. konvergent für alle $x \in [0, 2\pi]$) $\Rightarrow$

Vertauschung von Σ und $\int$:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\, f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos mx\, dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx + b_n \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx\, dx \right.$$

Es gelten die "Orthogonalitätsrelationen"

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx = 2\pi \delta_{nm}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx = 2\pi \delta_{nm} \qquad \Rightarrow$$

also ist $\int_0^{2\pi} \cos mx \, f(x)\,dx = a_n \cdot \delta_{mn} = a_m$

bzw. analog $\int_0^{2\pi} \sin mx \, f(x)\,dx = b_n \, \delta_{mn} = b_m$

q.e.d.

<u>NB</u>: Die Orthogonalitätsrelationen gelten wegen:

$$2 \sin mx \cos nx = \sin(m-n)x + \sin(m+n)x$$
$$2 \sin mx \sin nx = \cos(m-n)x - \cos(m+n)x$$
$$2 \cos mx \cos nx = \cos(m-n)x + \cos(m+n)x$$

und $\int_0^{2\pi} \cos mx \, dx = 2\pi \, \delta_{m0}$, $\int_0^{2\pi} \sin mx \, dx = 0$

2.4. Konvergenz der Fourier-Reihe

Bedingungen (Dirichlet'sche Bedingungen):

1. $f(x)$ darf im Intervall $[0, 2\ell]$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen haben.
   An den Unstetigkeitsstellen müssen die Grenzwerte $f_{i+} = f(x_i + 0)$ und $f_{i-} = f(x_i - 0)$ <u>endlich</u> sein.

2. Das Intervall $[0, 2\ell]$ muß in endliche viele Teilintervalle zerlegbar sein, so daß $f(x)$ in jedem Teilintervall

monoton ist. (Ausschluß unendlich schneller Oszillation).

2.5. Beispiele:

a) $f(x) = c \cdot \sin x \quad \Rightarrow a_i = 0 \ , \ b_1 = c \ , \ b_{2 \ldots n} = 0$

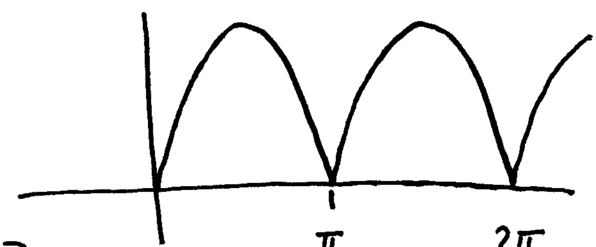
$f(x) = c \quad \Rightarrow a_0 = 2c \ , \ a_{1 \ldots n} \ , \ b_i = 0$

b) $f(x) = \sin^2 x$

mit $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow a_0 = 1 \ , \ a_2 = -\frac{1}{2}$ alle anderen 0

c) $f(x) = |\sin x|$ "Zweiweggleichrichter"

$+ f(x) = f(-x) \Rightarrow b_n = 0$



wähle $2\ell = \pi \Rightarrow$

$f(x) = \sin x$ im Intervall $[0, \pi]$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos 2nx \, dx$$

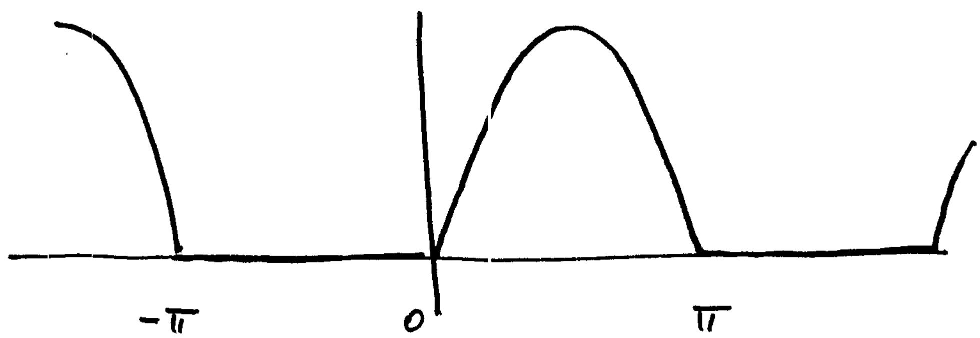
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(x+2nx) + \sin(x-2nx)\right]dx \quad \text{(Add.theorem)}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(x+2nx)}{1+2n} + \frac{\cos(x-2nx)}{1-2n}\right]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n)^2-1}$$

also: $a_0 = \frac{4}{\pi}$; $a_1 = -\frac{4}{3\pi}$; $a_2 = -\frac{4}{15\pi}$; ....

d) Einweggleichrichter:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x & \text{für } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



Wähle: $2l = 2\pi$, $\alpha = -\pi$ $\Rightarrow$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\sin(x+nx) + \sin(x-nx)] \, dx$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \frac{1-(-1)^{n+1}}{n^2-1} & \text{für } n \neq 1 \\ 0 & \text{für } n = 1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos(x - nx) - \cos(x + nx) \right] dx$$

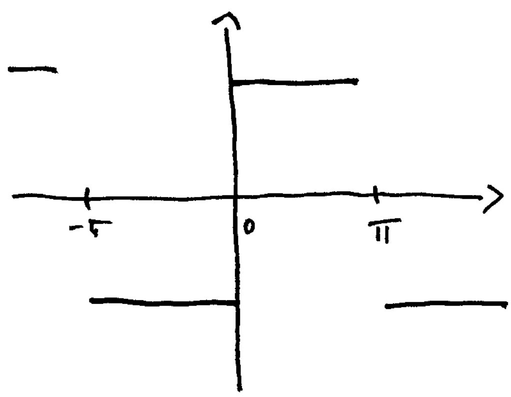
$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n = 2, \dots \end{cases}$$

Vergleich von Einweg- und Zweiweg-Gleichrichter

Einweg	Zweiweg
$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \lvert\sin x\rvert)$	$f(x) = \lvert\sin x\rvert$
$f(x) = \frac{1}{\pi} + \underline{\frac{1}{2}\sin x} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \dots\right)$	$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \dots\right)$

e) Mäander-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ c_2 & \text{für } 0 < x < \pi \end{cases}$$



$$a_0 = c_1 + c_2 \quad ✓$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} c_1 \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} c_2 \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{c_1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{c_2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = 0 \quad ✓$$

(ungerade Funktion bis auf "offset" a_0]

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1 \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} c_2 \sin nx \, dx\right]$$

$$= \frac{c_1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{c_2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

(mit $\cos n\pi = (-1)^n$) $\Longrightarrow$

$$b_n = \frac{c_2 - c_1}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

also

$$f(x) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2(c_2 - c_1)}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right]$$

Spezialfall: symmetr. Fkt $c_1 = -1$ $c_2 = +1$:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right]$$