

1.9. Rechenregeln für $\vec{\nabla}$

a) Produktregeln

Beispiel: $\operatorname{div}(\phi \vec{A}) = \vec{\nabla}(\phi \vec{A}) =$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_z) =$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \phi \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \phi \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z + \phi \frac{\partial A_z}{\partial z} =$$

$$\vec{A} \cdot \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \vec{A} = \underline{\underline{\vec{A} \vec{\nabla} \phi + \phi \vec{\nabla} \vec{A}}}$$

Anwendung der Produktregel liefert also:

$$\operatorname{div}(\phi \vec{A}) = \vec{\nabla}(\phi \vec{A}) = \vec{A} \vec{\nabla} \phi + \phi \vec{\nabla} \vec{A}$$

$$\operatorname{rot}(\phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\phi_c \vec{A}) + \vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}_c)$$

$$= -\vec{A} \times \vec{\nabla} \phi + \phi (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{A} \times \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{rot} \vec{A}$$

($\phi_c, \vec{A}_c$ = nicht ableiten!)

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_c \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}_c)$$

$$= -\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$= -\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} + \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{A}} - \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B}} \\ &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \end{aligned}$$

Achtung: $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{A} \quad \blacktriangledown$

z.B. Kraft auf el. Dipol im inhomogenen elektrischen

Feld: $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \neq \vec{p} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ &\left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \\ \vec{E}_z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} p_x \left(\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} \right) \\ \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Zweite Ableitungen

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \Delta \phi$$

kons. Feldes
kein Wirbelfeld: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) \equiv 0 \quad !$

Wirbelfeldes
kein quellenfrei: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0 \quad !$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

Motivation

$$\text{z.B. } \phi = \frac{1}{r} \quad \text{grad } \phi = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

war kompliziert in kart. Koordinaten.

in Polarkoordinaten (r, θ, φ) gilt:

$$\left[(\text{grad } \phi)_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (\text{grad } \phi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (\text{grad } \phi)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right]$$

$$\Rightarrow (\text{grad } \phi)_r = -\frac{1}{r^2} \quad (\text{grad } \phi)_\theta = (\text{grad } \phi)_\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \text{grad } \phi = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Herleitung der Darstellungen (Rechenregeln)

für grad, div, rot, Δ in

- Polar-Koordinaten

- Zylinder-Koordinaten