

1.7. Rotation

Für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ ist

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

die Rotation von $\vec{A}$

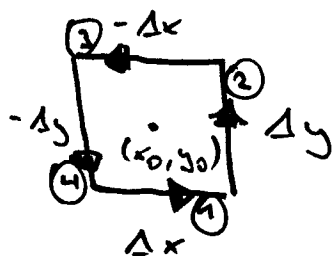
Schreibweise als Determinante:

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Das Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$ heißt Wirbelfeld von $\vec{A}$

Deutung: $\text{rot } \vec{A}$ gibt die "lokale Wirbelstärke"
(Zirkulation/Fläche) an.

Betrachte infinitesimales Rechteck in (x,y) -Ebene:



Zirkulation:

$$\oint_{\square} \vec{A} d\vec{r} =$$

$$= \underbrace{\int A_x(\vec{r}) dx}_{(1)} + \underbrace{\int A_y(\vec{r}) dy}_{(2)} + \underbrace{\int A_x dr}_{(3)} + \underbrace{\int A_y(\vec{r}) dy}_{(4)}$$

für kleine $\Delta x, \Delta y$: Taylorentwicklung von $\vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{A}(x, y) = \vec{A}(x_0, y_0) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \Delta y$$

$$\Rightarrow \oint_{\square} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \left[A_x(x_0, y_0) + \frac{\partial A_x}{\partial y} \left(-\frac{\Delta y}{2}\right) \right] \Delta x \quad (1)$$

$$+ \left[A_x(x_0, y_0) + \frac{\partial A_x}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2}\right) \right] (-\Delta x) \quad (3)$$

$$+ \left[A_y(x_0, y_0) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2}\right) \right] \Delta y \quad (2)$$

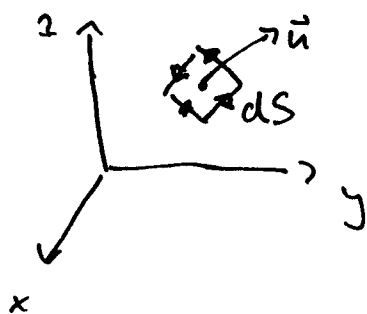
$$+ \left[A_y(x_0, y_0) + \frac{\partial A_y}{\partial x} \left(-\frac{\Delta x}{2}\right) \right] \Delta y \quad (4)$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = (\text{rot } \vec{A})_z \Delta S$$

entsprechend: $(\text{rot } \vec{A})_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$

$$(\text{rot } \vec{A})_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)$$

beliebige infinitesimale Fläche:



$$\oint_{\text{Rand von } d\vec{S}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Orientierung von $d\vec{S}$: "rechte Hand"-Regel

Beispiele: a) rotierende Flüssigkeit

Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega_y z - \omega_z y, \omega_z x - \omega_x z, \omega_x y - \omega_y x)$

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v} \times \vec{v}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y, \frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z, \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \right)$$

$$= (\omega_x + \omega_x, \omega_y + \omega_y, \omega_z + \omega_z) = 2 \vec{\omega}$$

b) Zentralfeld (z.B. $\vec{E}$ -Feld einer Punktladung)

$$\vec{A}(\vec{r}) = f(r) \cdot \vec{r}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y} (f(r) z) - \frac{\partial}{\partial z} (f(r) y), \frac{\partial}{\partial z} (f(r) x) - \frac{\partial}{\partial x} (f(r) z), \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} (f(r) y) - \frac{\partial}{\partial y} (f(r) x) \right)$$

$$= \left(z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z}, x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \left(z \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial r}{\partial z}, x \frac{\partial r}{\partial z} - z \frac{\partial r}{\partial x}, y \frac{\partial r}{\partial x} - x \frac{\partial r}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \left(z \frac{y}{r} - y \frac{z}{r}, x \frac{z}{r} - z \frac{x}{r}, y \frac{x}{r} - x \frac{y}{r} \right)$$

$$= (0, 0, 0) = \vec{0}$$

alle Zentralfelder sind wirbelfrei!

Rechenregeln für rot:

$$\text{rot}(\vec{f}(\vec{r}) + \vec{g}(\vec{r})) = \text{rot} \vec{f}(\vec{r}) + \text{rot} \vec{g}(\vec{r})$$

$$\text{rot}(\alpha \cdot \vec{f}(\vec{r})) = \alpha \text{rot} \vec{f}(\vec{r}) \quad \alpha = \text{const}$$

$$\text{rot}(\varphi(\vec{r}) \vec{f}(\vec{r})) = \varphi(\vec{r}) \text{rot} \vec{f}(\vec{r}) + (\text{grad } \varphi(\vec{r})) \times \vec{f}(\vec{r})$$

$$(\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{f})) = \varphi (\vec{\nabla} \times \vec{f}) + \vec{\nabla} \varphi \times \vec{f} \quad \text{"Produktregel"}$$

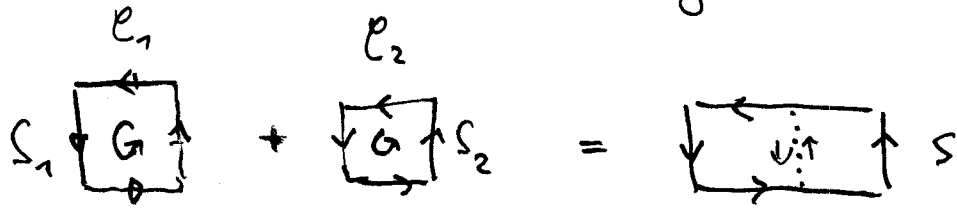
1.8. Stokes'scher Satz

für infinitesimale Flächen $d\vec{S}$ war:

$$\oint_{\text{Rand von } d\vec{S}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Übergang zu endlichen Flächen:

Zusammensetzen zweier geschlossener Kurven:


$$\oint_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_{\text{Rand von } S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

(da sich die Beiträge vom gemeinsamen Rand wegheben).

also für endl. Fläche:

$$\oint_{\text{Rand von } S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_i \text{rot } \vec{A} \cdot \Delta \vec{S}_i = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

also

$\oint_{\text{Rand von } S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$
--

Stokes'scher Satz

"Zirkulation eines Vektorfeldes um den Rand einer Fläche gleich dem Fluß des zugehörigen Wirbelfeldes durch diese Fläche"

Stokes: Rand von $S(\vec{A}) \Leftrightarrow$ Fläche S ($\text{rot } \vec{A}$)

Gauß: Oberfläche von $V(\vec{A}) \Leftrightarrow$ Volumen V ($\text{div } \vec{A}$)

Folgerungen:

a) für konservative Felder $\vec{A}$ ist $\text{rot } \vec{A} = 0$

("konservative Vektorfelder sind wirbelfrei")

(für kons. Felder gilt $\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle Kurven $\mathcal{C} \Rightarrow$

$\oint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$ für bel. Flächen $\Rightarrow \text{rot } \vec{A} = 0$)

b) $\Rightarrow \text{rot grad } \varphi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$!

c) wenn $\vec{A}$ eine geschlossene Feldlinie besitzt
kann $\text{rot } \vec{A}$ nicht überall verschwinden

d) es gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right. \\ \left. = 0 \quad \text{wg} \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

damit folgt (Gauß'sches Satz), daß

$$\oint \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0$$

"Wirbelfelder sind quellenfrei"