

1.4. Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}) = A_x(\vec{r})\vec{e}_x + A_y(\vec{r})\vec{e}_y + A_z(\vec{r})\vec{e}_z$

ist definiert als

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

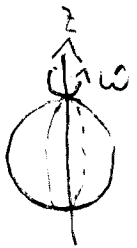
Beispiel: a) $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= a + b + c$$

b) Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden homogenen Kugel
(im Inneren)

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$



$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (-\omega_0 z) + \frac{\partial}{\partial y} \omega_0 x + 0 = 0.$$

c) Gravitationsfeld einer homogenen Kugel:

$$g(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\gamma M}{R^3} \vec{r} & |\vec{r}| < R \\ -\frac{\gamma M}{r^3} \vec{r} & |\vec{r}| \geq R \end{cases} \quad r \equiv |\vec{r}|$$

im Inneren: $\operatorname{div} g(\vec{r}) = -\frac{\gamma M}{R^3} \operatorname{div} \vec{r} = -\frac{3\gamma M}{R^3} = \text{const.}$

(Dichte: $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \operatorname{div} g(\vec{r}) = -4\pi\gamma\rho$)

außerhalb: $\operatorname{div} g(\vec{r}) = -\gamma M \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = -\gamma M \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} \right)$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{r^3 - 3r^2 \cdot \frac{x}{r} \cdot x}{r^6} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right]$$

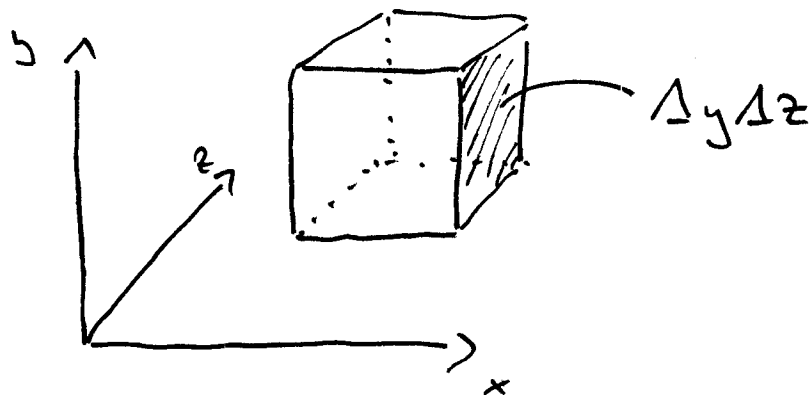
$$\Rightarrow \operatorname{div} g(\vec{r}) = -\gamma M \cdot \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = 0$$

Anschauliche Deutung der Divergenz:

Beispiel eines Vektorfeldes: Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = \rho \vec{v}$

(strömende Flüssigkeit, Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$, Dichte $\rho(\vec{r})$)

Betrachte Fläche parallel zur yz -Ebene: $\Delta S = \Delta y \Delta z$



Fluß durch ΔS : $\phi_x = j_x \Delta S$, $\phi_{x+\Delta x} = j_{x+\Delta x} \Delta S$

$$\begin{aligned} \text{Überschuß: } \Delta \phi_x &= [j_x(x+\Delta x, y, z) - j_x(x, y, z)] \cdot \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

analog für $\Delta \phi_y$, $\Delta \phi_z \Rightarrow$ Gesamtüberschuß des Flusses aus einem Quader $\Delta x \Delta y \Delta z$:

$$\Delta \phi = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \operatorname{div} \vec{j} \cdot \Delta V$$

$\operatorname{div} \vec{j} > 0$: Quelle im Volumen ΔV

$\operatorname{div} \vec{j} < 0$: Senke im Volumen ΔV

1.5. Flächenintegral

Fluss eines Vektorfeldes $\vec{A}$ durch eine beliebig gerichtete Fläche ΔS (Normalenvektor $\vec{n}$) ist

$$\Delta \phi = \vec{A} \cdot \vec{n} \Delta S$$

für eine endliche Fläche S ist

$$\Phi = \iint_S \vec{A}(\vec{r}) \vec{n}(\vec{r}) dS = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{A}_i \vec{n}_i \Delta S_i$$

Spezialfall: geschlossene Fläche:

$$\Phi = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Bei geschlossenen Flächen zeigt der Normalenvektor immer nach außen (Konvention).

Berechnung von Flächenintegralen:

parametrisierte Fläche (analog param. Kurve):

$\vec{r}(u, v)$: Fläche definiert durch alle Punkte $\vec{r}(u, v)$
(mit Randbedingungen an u und v)

Beispiel: Kugeloberfläche (Radius R)

$$\vec{r}(x, y) = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \vec{e}_z$$

$$\text{Randbed: } x^2 + y^2 \leq R^2$$

oder:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = R \cdot \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + R \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + R \cos \theta \vec{e}_z$$

$$0 \leq \theta < \pi \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\text{einfacher da } \theta, \varphi \text{ unabhängig})$$

Orientierung der Fläche:

Darstellung der Fläche als Niveaufäche eines Skalarfeldes. Beispiel Kugeloberfläche:

$$\psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \text{const}$$

dann ist der Normaleinheitsvektor:

$$\vec{n}(\vec{r}) = \frac{\text{grad } \psi(x, y, z)}{|\text{grad } \psi(x, y, z)|} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \left| \vec{r}|=R \right.$$

allgemein für die Kugel

Transformation des Integrals:

$$\oiint \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

$$\text{allg: } dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$$

$$\text{speziell Kugel: } dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Beispiel: $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$

$$\oiint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \cdot dS \quad \text{mit } S = \text{Kugeloberfläche, } r=R$$

$$= \oiint \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot dS \Big|_{|\vec{r}|=R} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^\pi R^3 \cdot 2\pi \cdot \sin\theta d\theta = \underline{4\pi R^3} \quad (= 3 \times \text{Volumen!})$$

(mehr zu Koordinatentransformationen $\Rightarrow$ 1.10)

1.6. Gauß'scher Satz

Beziehung zwischen Volumenintegral über die Divergenz und dem Flächenintegral über den Fluss eines Vektorfeldes:

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (d\vec{S} \equiv \vec{n} dS)}$$

wir hatten: $\Delta\phi = \operatorname{div} \vec{A} \Delta V = \vec{A} \cdot \vec{n} \Delta S$

(auch) für infinitesimal kleine Volumina ΔV

$\Rightarrow$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \phi \quad \text{o.k. aber ist}$$

der Gesamtfluß $\phi = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ über die Oberfläche von V ?

$\Rightarrow$ zusammen setzen zweier Quader mit $\Delta V_1, \Delta V_2$

$\Rightarrow$ Flüsse an den Grenzflächen heben sich auf!
(entgegengesetzte Orientierung der Flächennormalen)

$$\Rightarrow \Phi_{\text{ges}} = \Phi(\text{Oberfläche von } V_1 \text{ und } V_2)$$

$\Rightarrow$ im Grenzwert infinitesimal kleiner $V_i \Rightarrow$

$$\Phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \text{o.k.}$$

Beispiele: a) $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$ Kugel mit Radius R

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = 4\pi R^3 \quad (\text{s.o.}) \quad , \quad \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 3.$$

$$\Rightarrow \iiint_V \text{div } \vec{A} dV = 3 \cdot \underbrace{\iiint_V dV}_{\text{Kugelvolumen}} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \checkmark$$

b) Gravitationsfeld einer homogenen Kugel (Radius R)

$$r > R : \text{div } \vec{g} = 0 \quad , \quad r < R : \text{div } \vec{g} = -4\pi\gamma\rho$$

$$\Rightarrow \iiint_V \text{div } \vec{g} dV = -4\pi\gamma M \quad (V: \text{irgendein Volumen, das die Kugel einschließt})$$

$$= \oint_S \vec{g} d\vec{S}$$

$\Rightarrow$ Der Fluß ist $\sim$ Masse (egal wie tie versteilt ist)

"Massen sind die Quellen des Gravitationsfeldes"

c) Vorsicht! Gravitationsfeld einer Punktmasse

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\gamma M \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{g} = -\gamma M \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} \right)$$

$$= 0 \quad ??? \quad \rightarrow (\text{Gauß'scher Satz}) \quad \oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = 0 \quad ???$$

(Punktmasse erzeugt ~~keinen~~ Fluß ??)

Problem liegt in der Singularität bei $r=0$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{g} = 0 \quad \text{für alle } \vec{r} \text{ mit } |\vec{r}| \neq 0.$$

den korrekten Fluß erhält man (z.B.) aus der ausgedehnten Kugel im Grenzwert $R \rightarrow 0$ bei konst. Masse.

$$\left(\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma M \quad \text{unabh. von } R \right)$$

Koordinatenunabhängige Definition der Divergenz:

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{A} \, dV = \oint_{\partial(\Delta V)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Grenzfall $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\operatorname{div} \vec{A} := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Gauß'scher Satz für skalare Felder :

betrachte : $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \phi(\vec{r})$ $\vec{a}$ = beliebig aber konstant

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} (\vec{a} \cdot \phi(\vec{r})) = \phi(\vec{r}) \cdot \underbrace{\operatorname{div} \vec{a}}_0 + \vec{a} \operatorname{grad} \phi$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \iiint_V \operatorname{grad} \phi \, dV = \vec{a} \cdot \oint \phi \, d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \left(\iiint_V \operatorname{grad} \phi \, dV - \oint \phi \, d\vec{S} \right) = 0 \quad \text{für bel. } \vec{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\iiint_V \operatorname{grad} \phi \, dV = \oint \phi \, d\vec{S}}$$