

1. Vektoranalysis

1.1. Felder

Felder sind Funktionen die den drei-dimensionalen Raum als Definitionsbereich haben.

Skalare Felder: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

jedem Raumpunkt $\vec{x} = (x, y, z)$ wird eine Zahl ϕ zugeordnet $\phi = \phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z)$

Beispiele:

- Temperaturverteilung
- Dichteverteilung
- Ladungsdichte
- potentielle Energie, Potential z.B.

Potential einer Punktladung bei $\vec{r} = 0$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad r = |\vec{r}|$$

Potential eines el. Dipols bei $\vec{r} = 0$ ("Fernfeldnäherung:")

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(p_x x + p_y y + p_z z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}$$

zentrales Feld: $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$, d.h. der Wert von ϕ hängt nur vom Betrag von $\vec{r}$ ab

Niveaufläche: alle Punkte für die $\phi(\vec{r}) = C$

($C = \text{konstanter Wert}$) $\Rightarrow$ für zentrale Felder sind die Niveauflächen Kugelflächen

Funktionen, die jedem Raumpunkt einen Vektor zuordnen heißen

Vektorfelder: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{e}_x + A_y(x, y, z)\vec{e}_y + A_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

Beispiele:

- elektrisches Feld $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$
- Magnetfeld
- Gravitationsfeld
- Stromdichte

Gravitationsbeschleunigung einer Kugel der Masse M

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(x, y, z) = -\gamma M \cdot \frac{\vec{r}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} =$$

$$\frac{-\gamma M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma M \frac{x}{r^3} \\ -\gamma M \frac{y}{r^3} \\ -\gamma M \frac{z}{r^3} \end{pmatrix}$$

1.2. Gradient

Gradient eines skalaren Feldes:

$$\text{grad } \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{ist ein Vektorfeld!})$$

Deutung. betrachte Änderung von ϕ für $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \Delta \vec{r}$:

$$\Delta \phi = \phi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \phi(\vec{r})$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Delta z + o(|\Delta \vec{r}|^2)$$

$$\Delta \vec{r} \rightarrow d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\phi = \overrightarrow{\text{grad } \phi} \cdot d\vec{r}} \quad \begin{array}{l} \text{unabhängig} \\ \text{vom Koordinatensystem} \end{array}$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \text{ heißt}$$

totales Differential von ϕ

Richtung von $\text{grad } \phi$: Wenn $d\vec{r}$ in der Ebene einer Niveaufläche $\phi = \text{const}$ liegt, dann ist

$$d\phi = (\vec{\text{grad } \phi}) \cdot d\vec{r} = 0$$

(weil dann $\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r} + d\vec{r})$ ist!)

$\Rightarrow (\vec{\text{grad } \phi})$ steht senkrecht auf den Niveauflächen und zeigt in die Richtung des größten Anstiegs von ϕ

Beispiel: $\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

$$\text{grad } \phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{dr}{dx} \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{dr}{dy} \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{dr}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2r} \cdot 2x \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \end{pmatrix} = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad \boxed{7}$$

Nabla-Operator: "formaler" Vektor

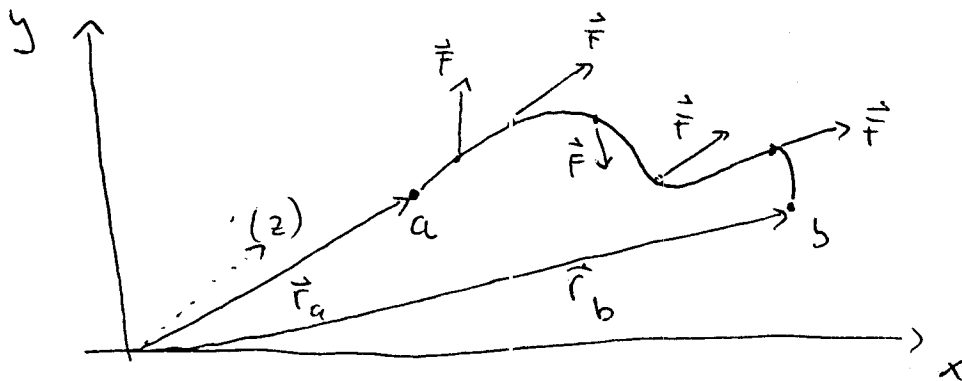
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \text{grad } \phi \equiv \vec{\nabla} \phi$$

1.3. Kurvenintegrale

Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$

Wie groß ist die verrichtete Arbeit entlang eines bestimmten Weges (einer Kurve) von $\vec{r}_a$ nach $\vec{r}_b$



$$W \approx \sum_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{r}$$

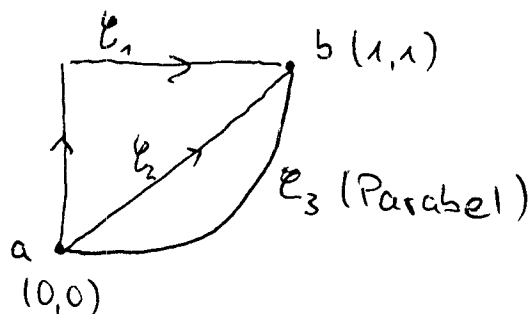
$$W = \lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \sum_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{r} \equiv \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Spezialfall: geschlossene Kurve $\vec{r}_a = \vec{r}_b$

$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ heißt Zirkulation von $\vec{F}$ entlang $\mathcal{C}$

Beispiel: konstante Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathcal{C}_1: \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx + \int_0^1 F_y dy = a + b$$

$\mathcal{C}_2$: parametrisierte Kurve $\vec{r}(u) = u\vec{e}_x + u\vec{e}_y \quad 0 \leq u \leq 1$

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(u)) \frac{d\vec{r}}{du} du = \int_0^1 (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) du = a + b$$

$\mathcal{C}_3$: $\vec{r}(u) = u\vec{e}_x + u^2\vec{e}_y \quad , \quad \frac{d\vec{r}}{du} = \vec{e}_x + 2u\vec{e}_y$

$$\int_{\mathcal{C}_3} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \cdot (\vec{e}_x + 2u\vec{e}_y) du = au \Big|_0^1 + \frac{1}{2} 2bu^2 \Big|_0^1 = a + b$$

Konservative Vektorfelder:

Ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, das sich als $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$

Schreiben lässt heißt konservativ.

Eigenschaften:
$$\int_{\vec{r}_a, \mathcal{C}}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a)$$

unabhängig vom gewählten Weg $\mathcal{C}$.

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0} \quad \begin{array}{l} \text{für konservat. Felder} \\ \text{und beliebige } \mathcal{C} \end{array}$$

Das skalare Feld ϕ aus dem sich $\vec{A}(\vec{r})$ als $\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ ergibt heißt Potential.

Beispiel: offensichtlich ist $\phi(\vec{r}) = ax + by$ ein Potential zu $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_a = (0,0)}^{\vec{r}_b = (1,1)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a) = a + b \quad \checkmark$$

unabhängig vom Weg.