

Kapitel 13

Systeme orthogonaler Funktionen

13.1 Die Fourier - Reihe

Ist die Funktion $f(x)$ einer beliebigen Variablen x periodisch mit der Periode $2l$, d.h.

$$f(x + 2l) = f(x) ,$$

so läßt sich die Funktion unter recht weiten Bedingungen (s. u.) durch eine Fourier-Reihe interpolieren, d. h. als eine Überlagerung von Sinus- und Kosinus-Funktionen der Periode $2l/n$ ($n = 1, 2, \dots \infty$) darstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n \pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n \pi x}{l} \\ \text{mit} \\ A_n &= \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) \cos \frac{n \pi x}{l} dx & n = 0, 1, 2, \dots \\ & & \alpha \in \mathbb{R} \\ B_n &= \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Häufig vorkommende Spezialfälle sind $2l = 2\pi$ mit $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = -\pi$, falls x eine dimensionslose Variable (Winkel) ist.

Falls für x die Variable der Zeit t eingesetzt wird, dann bedeutet die Approximation der Schwingung $f(t)$ durch die Fourier-Reihe, daß eine Frequenzanalyse durchgeführt wird.

Im Frequenzanalysator wird $f(t)$ in harmonische Schwingungen zerlegt. Dabei ist $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ jeweils die Kreisfrequenz. Im Frequenzsynthesizer, umgekehrt, wird $f(t)$ aus harmonischen Schwingungen aufgebaut. A_n und B_n sind die Spektralkoeffizienten, die, über den Frequenzen ω_i aufgetragen, das diskrete Frequenzspektrum ergeben.

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Reihe:

- $A_0/2$ ist der Mittelwert von $f(x)$.
- Für eine gerade Funktion ($f(-x) = f(x)$) enthält die Reihe nur cos-Terme ($B_n = 0$).
- Für eine ungerade Funktion ($f(-x) = -f(x)$) enthält die Reihe nur sin-Terme ($A_n = 0$).

Herleitung der Fourier-Reihe

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $l = \pi$ und $\alpha = 0$ gewählt werden. Der Ansatz der Fourier-Reihe wird, wie oben beschrieben, angenommen. Es ist dann zu zeigen, daß sich die Koeffizienten wie angegeben berechnen.

Multiplikation der Reihe mit $\cos mx$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) und Integration über die Grundperiode führt zu

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx + \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos mx \cos nx + B_n \cos mx \sin nx \right] dx$$

Ist $f(x)$ integrierbar und die Reihe gleichmäßig konvergent (d. h. konvergiert sie im Intervall $0 < x < 2\pi$), so lassen sich Summation und Integration vertauschen:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx + B_n \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx \right]$$

Es gilt bei Benutzung des **Kronecker Symbols**

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \, dx = 2 \cdot \pi \cdot \delta_{m0} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \, dx = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned} 2 \sin mx \cos nx &= \sin(m-n)x + \sin(m+n)x \\ 2 \sin mx \sin nx &= \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \\ 2 \cos mx \cos nx &= \cos(m-n)x + \cos(m+n)x \end{aligned}$$

erhält man die Orthogonalitätsrelationen:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx \\ \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx \end{aligned} \right\} = \pi \cdot \delta_{nm}$$

Dies eingesetzt liefert die Formel für A_m . Analog erhält man die Formel für B_m durch Multiplikation mit $\sin mx$ und Integration über x .

13.2 Konvergenz der Fourier - Reihe

Kriterien (Dirichletsche Bedingungen)

Damit die Fourier-Reihe im Intervall der Länge $2l$, z. B. im Intervall $0 \leq x \leq 2l$, konvergiert, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Im Intervall $0 \leq x \leq 2l$ darf $f(x)$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen. Die Grenzwerte

$$f_{i+} = f(x_i + 0) \quad \text{und} \quad f_{i-} = f(x_i - 0)$$

müssen endlich sein.

(Die Funktionswerte $f(x_i)$ an den Unstetigkeitsstellen werden nicht beachtet.)

2. Das Intervall $0 \leq x \leq 2l$ soll so in endlich viele Teilintervalle zerlegbar sein, daß in jedem $f(x)$ monoton ist. Dies schließt unendlich schnelle Oszillationen aus.

Der Wert der Reihe im Intervall $0 \leq x \leq 2l$ wird dann

$$\begin{aligned} f(x) & \quad \text{in allen stetigen Bereichen von } f(x); \\ \frac{1}{2} (f(x_i + 0) + f(x_i - 0)) & \quad \text{in allen Unstetigkeitsstellen } x_i; \\ \frac{1}{2} (f(+0) + f(2l - 0)) & \quad \text{an den Intervallenden.} \end{aligned}$$

In jedem abgeschlossenen Teilintervall, in dem $f(x)$ stetig ist, konvergiert die Reihe gleichmäßig.

Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe

Das Konvergenzverhalten der Reihe hängt stark von der Art der Unstetigkeitsstellen ab. Besitzt die Funktion $f(x)$ stetige Ableitungen bis zur $(k-1)$ -ten Ordnung und genügt die k -te Ableitung den Dirichletschen Bedingungen, dann gelten für die Koeffizienten der Reihe die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} A_n \cos \frac{n \pi x}{l} &\leq |A_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}} \quad \text{und} \\ B_n \sin \frac{n \pi x}{l} &\leq |B_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}}. \end{aligned}$$

Dabei ist M ein passend gewählter positiver Wert.

Damit erhält man eine Majorante zur Fourier-Reihe:

$$F.R. \equiv \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n \pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n \pi x}{l} \leq \frac{M}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{k+1}}$$

Man sieht daraus, daß bei einer stetigen Funktion $f(x)$, die schon endlich viele Unstetigkeitsstellen in $f'(x)$ besitzen soll, die Abschätzung lautet (d. h. $k=1$):

$$F.R. \leq \frac{M}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$$

Folglich konvergiert die Fourier - Reihe selbst in diesem Fall schon absolut und gleichmäßig.

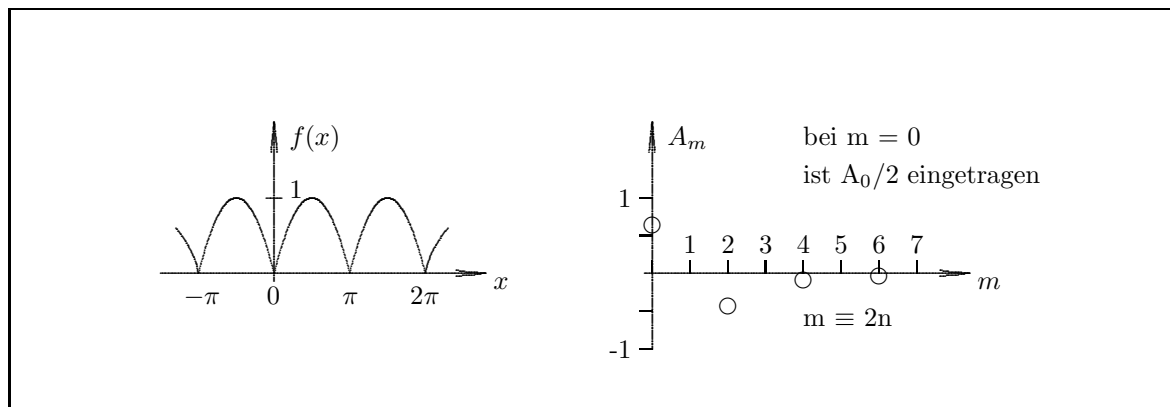
Bei unstetigen Funktionen läßt sich das Konvergenzverhalten verbessern, indem man eine einfache Treppenfunktion subtrahiert, die die gleichen Unstetigkeitsstellen wie $f(x)$ besitzt. Man entwickelt dann die Differenzfunktion.

13.3 Beispiele für Fourier-Zerlegungen

Beispiel 1: Zweiweggleichrichter erzeugen aus einem sinusförmigen Wechselstrom einen Strom, der sich im Idealfall darstellen läßt durch

$$f(x) = |\sin x|$$

Wegen $f(-x) = f(x)$ folgt $B_n = 0$. Die Periodizität ist $2l = \pi$.



Mit $l = \pi/2$ und $\alpha = 0$ und $f(x) = \sin x$ erhält man

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2n x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos 2n x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\sin(x+2nx) + \sin(x-2nx)] dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(x+2nx)}{1+2n} + \frac{\cos(x-2nx)}{1-2n} \right]_0^\pi \\
A_n &= -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n)^2 - 1}
\end{aligned}$$

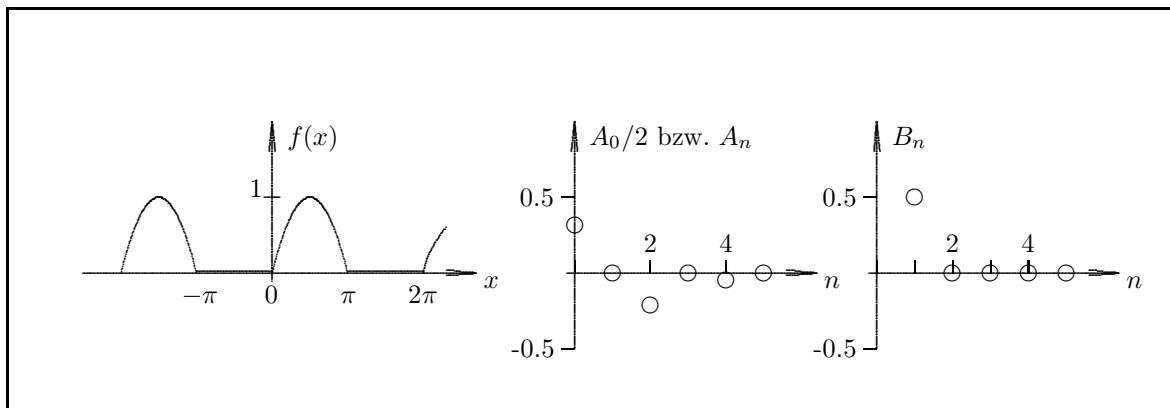
Damit wird

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} - \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} - \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} - \dots \right)$$

Beispiel 2: Einweggleichrichtung:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Es ist $l = \pi$. Wählt man $\alpha = -\pi$, dann folgt



$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\sin(x+nx) + \sin(x-nx)] dx
\end{aligned}$$

und wegen $\cos[(1 \pm n)\pi] = (-1)^{n+1}$

$$\begin{aligned}
A_n &= -\frac{1}{\pi} \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \quad \text{für } n \neq 1 \quad \text{und} \\
A_1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(x-nx) - \cos(x+nx)] dx
\end{aligned}$$

dies liefert

$$B_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-n)\pi]}{1-n} - \frac{\sin[(1+n)\pi]}{1+n} \right] = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 1.$$

Damit wird

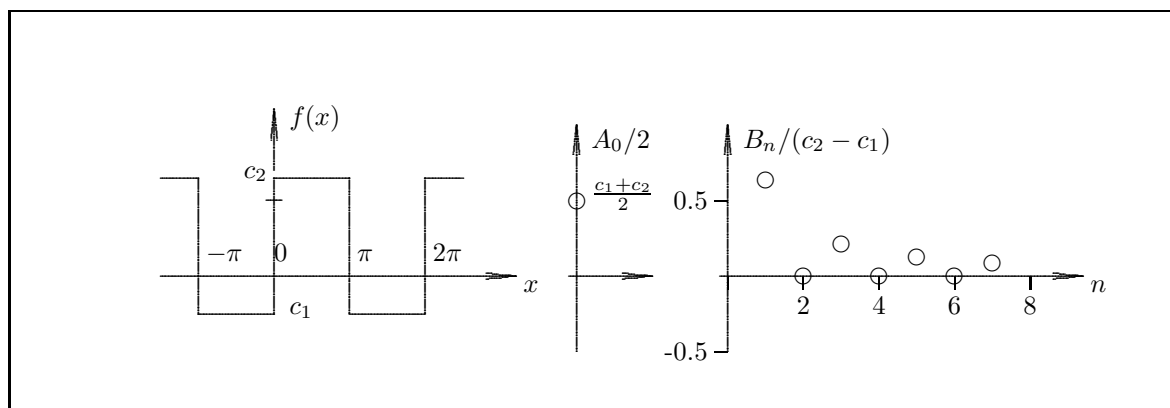
$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \dots \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + |\sin x|)$$

Beispiel 3: Mäander-Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \\ c_2 & \text{für} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Es ist $l = \pi$. Für $\alpha = -\pi$ folgt



$$A_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 c_1 dx + \int_0^{\pi} c_2 dx \right]$$

$$A_0 = c_1 + c_2$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 c_1 \cos nx dx + \int_0^{\pi} c_2 \cos nx dx \right]$$

$$= \frac{c_1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{c_2}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 c_1 \sin nx dx + \int_0^{\pi} c_2 \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{c_1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{c_2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi}$$

und wegen

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

$$B_n = \frac{c_2 - c_1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

Damit wird

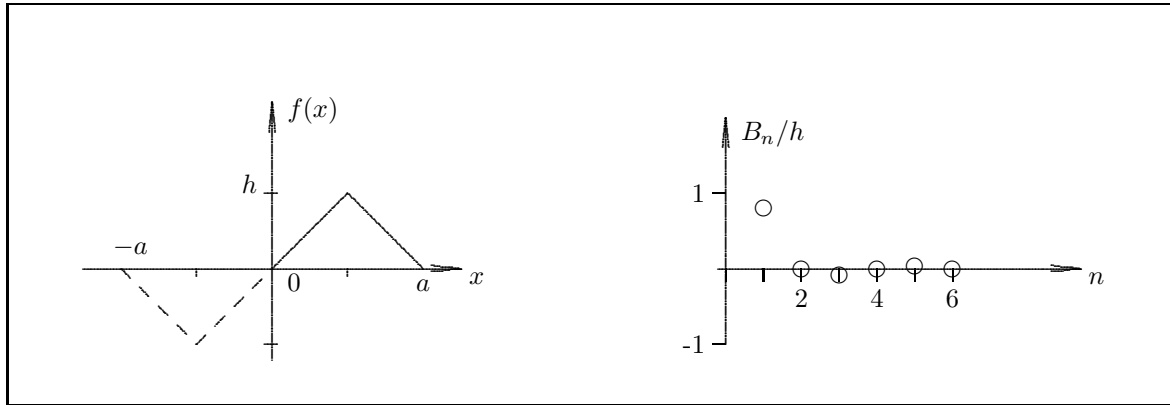
$$f(x) = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2(c_2 - c_1)}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right]$$

An den Unstetigkeitsstellen $-\pi, 0, \pi$, usw. nimmt die Reihe den Wert $(c_1 + c_2)/2$ an.

Beispiel 4: Die gezupfte Saite: Zur Zeit $t = 0$ sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{a} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ \frac{2h}{a} (a - x) & \text{für } \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

Die durch die physikalischen Bedingungen nur im Intervall $[0, a]$ definierte Funktion wird nun durch periodische Fortsetzung zu einer periodischen, mathematischen Funktion erweitert. Eine Möglichkeit, dies zu tun, ist die Fortsetzung als **ungerade** Funktion. Es ist $l = a$, und es sei $\alpha = -a$.



Aus Symmetriegründen ist

$$A_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\ &= \frac{4h}{a^2} \left[\int_0^{a/2} x \sin \frac{n\pi x}{a} dx + \int_{a/2}^a (a-x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \right] \end{aligned}$$

und wegen $\int x \sin bx dx = -\frac{1}{b} x \cos bx + \frac{1}{b^2} \sin bx$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{4h}{a^2} \left\{ \left[-\frac{a}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{a^2}{n^2\pi^2} x \sin \frac{n\pi x}{a} \right]_0^{a/2} \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{a}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{a} - \frac{a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \right]_{a/2}^a \right\} \\ B_n &= \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Damit wird

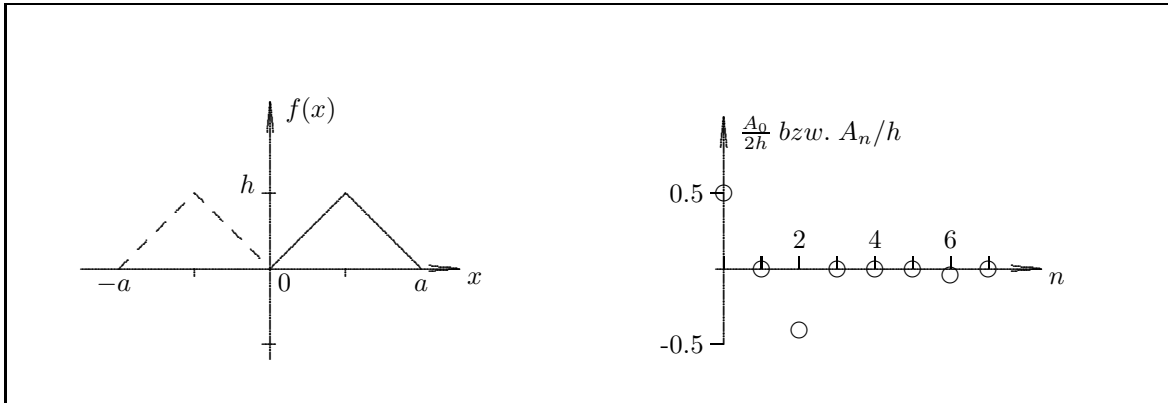
$$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{a} - \dots + \dots \right)$$

Die **gerade** Fortsetzung von $f(x)$ ist ebenfalls möglich. Sie führt zu

$$B_n = 0,$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= h, \\
A_n &= -\frac{16h}{n^2\pi^2} \quad \text{für } n = 2, 6, 10, \dots \quad \text{und} \\
A_n &= 0 \quad \text{sonst.}
\end{aligned}$$

Man erhält die Fourier-Reihe



$$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{2\pi 3x}{a} + \dots \right).$$

Sie beschreibt die Funktion im Intervall $0 \leq x \leq a$ ebenfalls richtig. Sie spiegelt jedoch nicht den physikalischen Sachverhalt wieder. Die Schwingungen haben keine Knoten an den Befestigungsstellen 0 und a . Die Auslenkungen zu $f(x) < 0$ müssen separat durch $h < 0$ hergestellt werden.

13.4 Das Gibbssche Phänomen

Anhand der rechteckförmigen Mäanderfunktion wird untersucht, wie gut die Approximation durch die Fourier-Reihe ist, wenn sie nach dem Term mit der m -fachen Grundfrequenz abgebrochen wird. Die zu untersuchende Summe für den Spezialfall $c_1 = -1$, $c_2 = +1$ lautet

$$f_m(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^m \frac{\sin nx}{n}$$

oder mit $2\nu + 1 \equiv n$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{(m-1)/2} \frac{\sin [(2\nu + 1)x]}{2\nu + 1}.$$

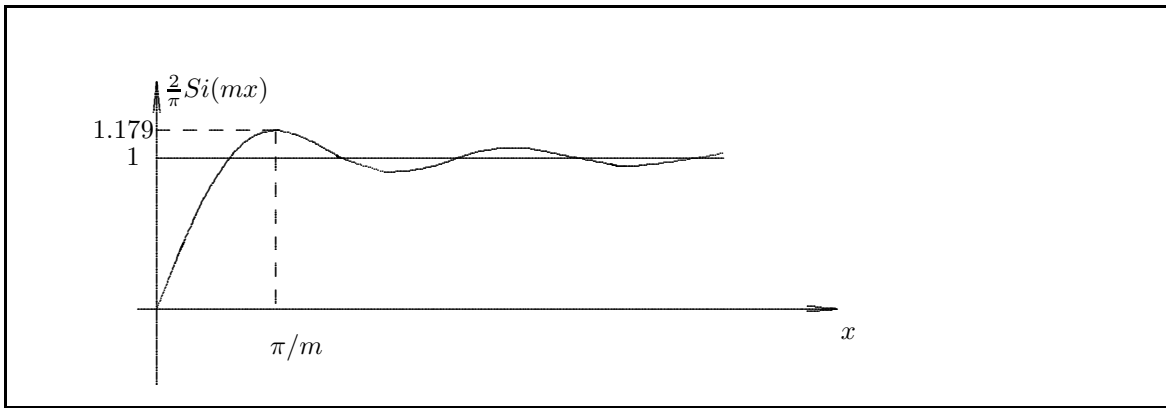
Mit der Substitution $\xi_\nu = (2\nu + 1)x$ und $\Delta\xi = \xi_\nu - \xi_{\nu-1} = 2x$ erhält man:

$$f_m(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{(m-1)/2} \frac{\sin \xi_\nu}{\xi_\nu} \Delta\xi$$

Für kleine x , in der Nähe der Sprungstelle bei $x = 0$, läßt sich die Summe in ein Integral überführen:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ mx \neq 0}} f_m(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{mx} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \equiv \frac{2}{\pi} Si(mx)$$

D. h. für kleine x kann die Funktion $f_m(x)$ durch den Integralsinus ersetzt werden. (s. z. B. Handbook of Mathematical Functions, editors M. Abramowitz and I. A. Stegun; National Bureau of Standards AMS 55 (1964) oder I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik; Verlag Harri Deutsch, Thun



/ Frankfurt M. (1985))

Besondere Werte sind:

$$\begin{aligned} Si(\pi) &= 1.852 \\ Si(\infty) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Die Näherung $f_m(x)$ schießt also bei $x = \pi/m$ um den Faktor $2 \cdot Si(\pi)/\pi = 1.179$ über die Rechteckfunktion hinaus.

13.5 Die Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise

Mit den Eulerschen Beziehungen

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \qquad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

wird die Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left(e^{i n \pi x/l} + e^{-i n \pi x/l} \right) + \frac{B_n}{2i} \left(e^{i n \pi x/l} - e^{-i n \pi x/l} \right).$$

Definiert man

$$\begin{aligned} A_{-n} &\equiv A_n \\ B_0 &\equiv 0 \\ B_{-n} &\equiv -B_n \qquad \text{und} \\ C_n &= \frac{A_n - i B_n}{2}, \end{aligned}$$

so kann die Summation bei $-\infty$ beginnen, und man erhält die Fourier-Reihe in kompakter Schreibweise ($\alpha = -l$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \pi x/l} \\ C_n &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i n \pi x/l} dx. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten C_n wurden symmetrische Integrationsgrenzen gewählt und die Orthogonalitätsrelationen

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{i m \pi x/l} e^{-i n \pi x/l} dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{i (m-n) \pi x/l} dx = \delta_{m n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

benutzt, die man mit Hilfe der Eulerschen Beziehungen aus den früheren Relationen für die Winkelfunktionen erhält.

13.6 Die diskrete Fourier-Transformation

Die Fourier-Reihe aus Kapitel 13.5 kann benutzt werden, um diskrete Funktionswerte zu interpolieren. Sei die Funktion $f(x)$ an m Stellen ($m = 0, 1, \dots, m-1$) mit $x_0 = 0$ gegeben und definiert man die Länge des Periodizitätsintervalls $L = 2l = x_m - x_0$ (d.h. $f(x_m) = f(x_0)$) so erhält man für die komplexen Koeffizienten

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i n \pi x / l} dx \\ &\approx \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_j) e^{-i n 2 \pi x_j / L} \Delta x \quad \text{mit } x_j = j \cdot L/m \text{ und } \Delta x = L/m \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_j) e^{-i n 2 \pi j / m} \end{aligned}$$

Die C_n liefern wieder das Häufigkeitsspektrum der für die Approximation nötigen Wellenzahlen. Diese sind Vielfache von $2\pi/L$.

In der Literatur findet man auch eine Definitionen, die anstelle von $1/m$, aus Symmetriegründen jeweils einen Faktor $1/\sqrt{m}$ bei der Gleichung für $f(x)$ und für C_n verwendet.

Für 2^M Datenpunkte erhält man besonders schnelle Algorithmen (Schnelle Fourier-Transformationen; FFT). Sie liefern $1+2^{M-1}$ komplexe Koeffizienten. Reelle Funktionen liefern reelle Koeffizienten. Die FFT-Algorithmen liefern dann häufig komplexe Koeffizienten der halben Anzahl. Die 2. Hälfte ist konjugiert komplex. Die entgeltigen Koeffizienten können daraus ermittelt werden.

13.7 Das Fourier-Integral

Eine nicht-periodische Funktion kann aufgefaßt werden als eine Funktion, deren Periodizitätsintervall von $-\infty$ bis ∞ reicht. Genügt die Funktion $f(x)$ den Dirichletschen Bedingungen in jedem Teilintervall und ist sie absolut integrierbar, d. h. existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx,$$

so läßt sie sich folgendermaßen in ein Fourier-Integral entwickeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i k x} dk \\ g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i k x} dx \end{aligned}$$

Die Beziehung ist symmetrisch:

$f(x)$ nennt man die Fourier-Transformierte von $g(k)$ und ebenso ist $g(k)$ die (inverse) Fourier-Transformierte von $f(x)$.

Ist x die Ortskoordinate, so ist k die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$. Wird anstelle von x die Zeitvariable t benutzt, dann gehört dazu die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$.

Herleitung der Integralformel

Man geht von der symmetrischen Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise aus.

Definiert man $k_n \equiv n\pi/l$ und $\Delta k \equiv k_n - k_{n-1} = \pi/l$ und setzt den Ausdruck für die Koeffizienten in die Reihe ein, so erhält man die Identität

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} e^{i k_n x} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-i k_n \xi} d\xi$$

Beim Grenzübergang $l \rightarrow \infty$ gehen $\Delta k \rightarrow dk$ und $k_n \rightarrow k$, und die Reihe geht in ein Integral über:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k x} \left\{ \int_{-l}^l f(\xi) e^{-i k \xi} d\xi \right\} dk$$

Das Innere Integral existiert nach Voraussetzung. Setzt man es gleich $\sqrt{2\pi} \cdot g(k)$, so erhält man die Integralformeln.

Nimmt man die gleiche Substitution bei den **Orthogonalitäts-Relationen** vor, so wird:

$$\frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-l}^l e^{i k_m x} e^{-i k_n x} dx = \delta_{m n}$$

und für jedes m bleibt bei Summation über n ein Term übrig:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-l}^l e^{i (k_m - k_n) x} dx = 1$$

Im Grenzübergang $l \rightarrow \infty$, ($k_m \rightarrow k'$, $k_n \rightarrow k$) erhält man die wichtige Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i (k' - k) x} dx dk = 1.$$

Benutzt man die folgende Definition der sogenannten Diracschen δ -Funktion:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i (k' - k) x} dx \equiv \delta(k' - k),$$

so lautet dies in Kurzform

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k' - k) dk = 1.$$

Allgemein gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k) \delta(k' - k) dk = g(k').$$

13.7.1 Das Fourier-Integral im 3-dimensionalen Raum

Die Erweiterung der Transformationsformeln für den 3-dimensionalen Raum lauten

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{k}) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 k \\ g(\vec{k}) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 r \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $g(\vec{k})$ in das 1. Integral kann man die Identität zeigen.

13.7.2 Das Fourier-Integral bei Kugelsymmetrie

Ist die Funktion $f(\vec{r})$ kugelsymmetrisch

$$f(\vec{r}) = f(r)$$

so vereinfacht sich die Formel für die Fourierkoeffizienten zu

$$g(\vec{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int f(r) e^{-i k r \cos \vartheta} d\varphi d \cos \vartheta r^2 dr \quad \text{mit } \cos \vartheta = \cos(\vec{k}, \vec{r})$$

$$g(k) = \frac{1}{k \sqrt{2\pi}} \left[i \int_0^{\infty} r f(r) e^{-i k r} dr + \text{conj. complex} \right]$$

oder auch

$$g(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} r^2 f(r) \frac{\sin(k r)}{k r} dr$$

Die Formel für $f(r)$ lautet entsprechend

$$f(r) = \frac{1}{r \sqrt{2\pi}} \left[-i \int_0^{\infty} k g(k) e^{i k r} dk + \text{conj. complex} \right]$$

13.7.3 Die diskrete Fourier-Transformation bei Kugelsymmetrie

Ist die Funktion wie in Kapitel 13.6 an m Stellen gegeben, so erhält man analog die Approximation für die Koeffizienten. Bei symmetrischer Schreibweise ergibt sich

$$g(k) \approx \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \left[i \sum_{j=0}^{m-1} r_j f(r_j) e^{-i k r_j} \Delta r + \text{conj. compl.} \right]$$

mit $k = n \cdot k_{\min}$, $k_{\min} = 2\pi/L$, $r_j = j L/m$ und $\Delta r = L/m$ folgt

$$\begin{aligned} C_n &\approx \frac{L^2}{n\sqrt{m}} (2\pi)^{-3/2} \cdot \left[\frac{i}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} r_j f(r_j) e^{-i n 2\pi j/m} + \text{conj. compl.} \right] \\ &= -\frac{L^2}{n\sqrt{m}} (2\pi)^{-3/2} \cdot 2 \cdot \text{Im}\{FFT(r_j f(r_j))\} \end{aligned}$$

13.8 Beispiele für Fourier-Zerlegungen von Impulsen

Beispiel 1: Man bestimme die Zerlegung eines Rechteck-Impulses der Form

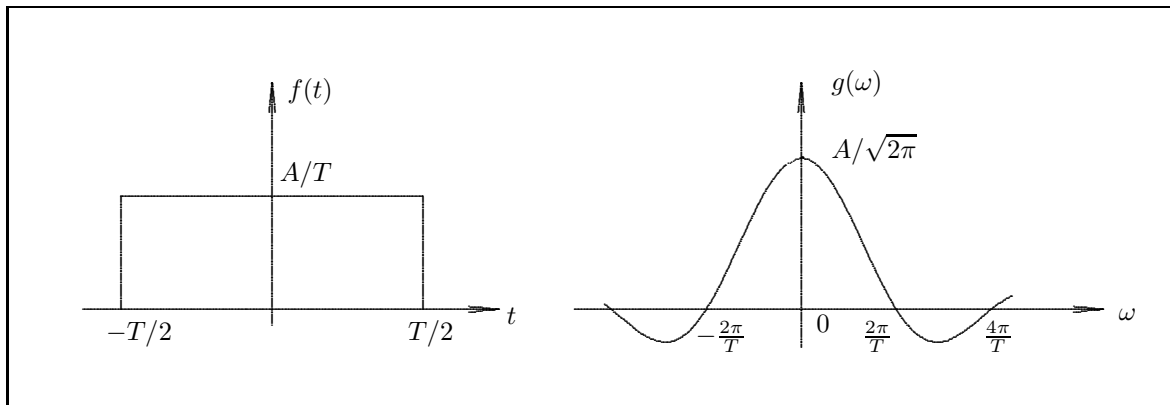
$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{T} & \text{für } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Die Fourier-Zerlegung lautet dann

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

mit der Spektralfunktion

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt && \text{und wegen } f(-t) = f(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t dt \\ g(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \end{aligned}$$



Diskussion:

- i) Wenn $T \rightarrow 0$, so erhält man einen schmalen Impuls mit scharfer Zeitdefinition. Die ersten Nulldurchgänge von $g(\omega)$ bei $\omega_0 = \pm 2\pi/T$ wandern ins Unendliche. D. h., es ist ein unendlich weites Frequenzspektrum nötig, um den scharfen Impuls aufzubauen.
- ii) $T \rightarrow \infty$ erzeugt ein enges, monochromatisches Frequenzspektrum um den Wert Null. Dies erwartet man auch anschaulich, da zu einer unendlich großen Wellenlänge eine unendlich kleine Frequenz gehört.

Beispiel 2: Ein Impuls sei gegeben durch

$$f(t) = e^{-|\alpha t|}$$

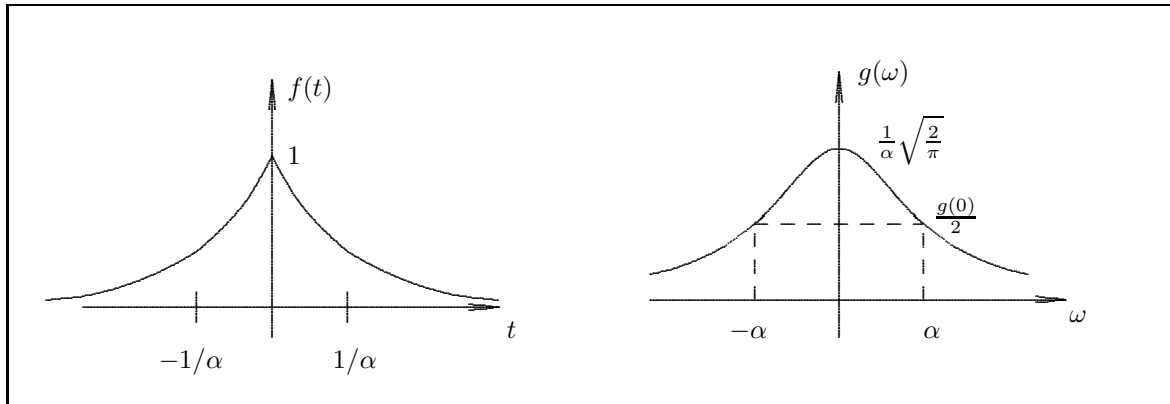
Wegen

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos \omega t \, dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

ergibt die Rechnung

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

eine sogenannte Lorentz-Kurve. Die halbe Höhe $g(0)/2$ liegt bei $\omega = \pm\alpha$.



Beispiel 3: Ein gaußförmiger Impuls mit der halben Breite σ am Wendepunkt

$$f(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$$

liefert mit Hilfe von

$$\int_0^\infty e^{-a^2 t^2} \cos \omega t \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\omega^2/(4a^2)}$$

auch ein gaußförmiges Frequenzspektrum:

$$g(\omega) = \sigma e^{-\sigma^2 \omega^2/2}.$$

