Kapitel 12

Schwingungen und Wellen

12.1 Definitionen

Das ein- oder mehrfache Anschwellen und Abklingen eines Meßwertes mit der Zeit nennt man eine **Schwingung**. Harmonische Schwingungen sind Lösungen der harmonischen Differentialgleichung und werden durch Kosinus-, Sinus- oder Exponentialfunktionen beschrieben (vgl. Abschnitt 9.3):

$$\ddot{y} + 2\,\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \qquad \text{(Dämpfung } \lambda\text{)}$$

hat die allgemeine Lösung

$$y = e^{-\lambda t}(A\ \sin\omega t + B\ \cos\omega t) \qquad (\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})$$

oder

$$y = e^{-\lambda t}(C_1\ e^{i\omega t} + C_2\ e^{-i\omega t}),$$

mit den beiden Integrationskonstanten A und B oder C_1 und C_2.

Eine **Welle** ist sowohl eine Funktion des Ortes als auch der Zeit. Man versteht als Welle eine Größe, die durch Funktionen der Art

$$f_1 = f_1(x + v\ t)$$
$$f_2 = f_2(x - v\ t)$$

dargestellt werden. Das Argument der Funktion heißt die **Phase**

$$\varphi_\pm = x \pm v\ t$$

Eine konstante Phase wandert für φ_+ mit zunehmender Zeit t in negative, für φ_- in positive x - Richtung.

Ein Punkt mit konstanter Phase, z. B. ein bestimmter Wellenberg, genügt der Gleichung

$$x \pm v\ t = const.$$

Differentiation nach der Zeit liefert

$$\dot{x} = \mp v;$$

d. h. ein Punkt konstanter Phase bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit v.

12.2 Harmonische Wellen

Harmonische Wellen werden durch Sinus-, Kosinus- oder Exponentialfunktionen beschrieben. Man erhält sie im 1 - dimensionalen Raum durch die
Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}.$$

Mit dem Ansatz $\psi(x,t) = \mathcal{X}(x)\cdot\mathcal{T}(t)$ erhält man

$$\frac{\mathcal{X}''}{\mathcal{X}} = \frac{1}{v^2}\frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}},$$

mit den Abkürzungen:

$$\mathcal{X}'' = \frac{d^2\mathcal{X}}{d\mathcal{X}^2} \qquad \mathcal{T}'' = \frac{d^2\mathcal{T}}{d\mathcal{T}^2}.$$

Weil nun auf den beiden Seiten der Gleichung unabhängige Funktionen von den unterschiedlichen Parametern x und t stehen, läßt sich die Gleichung trennen, indem man beide Seiten einer Konstanten ($-k^2$) gleichsetzt:

$$\frac{\mathcal{X}''}{\mathcal{X}} = -k^2 \qquad \frac{1}{v^2}\frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}} = -k^2$$
$$\mathcal{X}'' + k^2\,\mathcal{X} = 0 \qquad \mathcal{T}'' + k^2\,v^2\,\mathcal{T} = 0$$
$$\mathcal{X}_\pm = A_{\mathcal{X}_\pm} e^{\pm i\,k\,x} \qquad \mathcal{T}_\pm = A_{\mathcal{T}_\pm} e^{\pm i\,k\,v\,t}\ .$$

Eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1\, e^{+i\,k\,(x+v\,t)} + A_2\, e^{-i\,k\,(x+v\,t)} \\ \psi_2 &= A_3\, e^{+i\,k\,(x-v\,t)} + A_4\, e^{-i\,k\,(x-v\,t)} \end{aligned}$$

$$(A_1 = A_{\mathcal{X}_+} \cdot A_{\mathcal{T}_+})$$
$$(A_2 = A_{\mathcal{X}_-} \cdot A_{\mathcal{T}_-})$$
$$(A_3 = A_{\mathcal{X}_+} \cdot A_{\mathcal{T}_-})$$
$$(A_4 = A_{\mathcal{X}_-} \cdot A_{\mathcal{T}_+})$$

mit der allgemeinen Lösung : $\psi = \psi_1 + \psi_2.$

Randbedingungen legen die Konstanten fest.
Die allgemeine Lösung zeigt, daß sich mehrere harmonische Wellen ungestört überlagern können.
Für reelles k sind die Wellen periodisch in x mit der Periodenlänge λ:

$$\psi(k\,x + k\,\lambda,\ t_0) = \psi(k\,x,\ t_0)\ ,$$

wenn $k\,\lambda = 2\,\pi\ ,$

also $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$

Ebenso erhält man die Periodizität in t mit der Periode T:

$$\psi(x_0,\ k\,v\,t + k\,v\,T) = \psi(x_0,\ k\,v\,t)\ ,$$

wenn $k\,v\,T = 2\,\pi\ .$

Mit $\nu = 1/T$ folgt $\lambda\,\nu = v$

und $k\,v = 2\,\pi\,\nu \equiv \omega.$

Im 3 - dimensionalen Raum muß die 2 - fache Ortsableitung in der Wellengleichung durch den Laplace - Operator ersetzt werden. Sie lautet dann

$$\Delta\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\,\psi}{\partial\,t^2}.$$

Im kartesischen Koordinatensystem kann sie separiert werden durch den Ansatz

$$\psi(x,\ y,\ z,\ t) = \mathcal{X}(x) \cdot \mathcal{Y}(y) \cdot \mathcal{Z}(z) \cdot \mathcal{T}(t).$$

Spezielle Lösungen sind die Ebenen Wellen und die Kugelwellen.

12.3 Spezielle Wellen

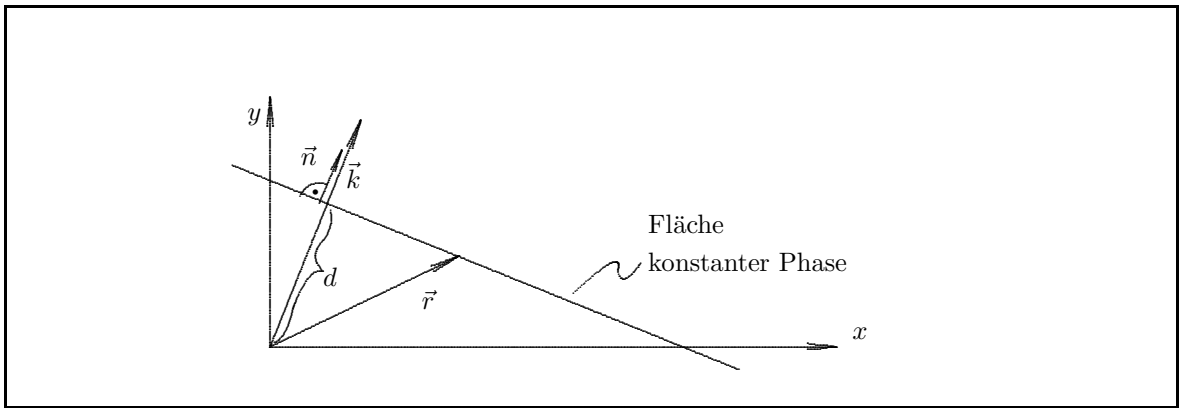
Ebene Wellen

Ebene Wellen werden beschrieben durch

$$\psi = f(\vec{k}\ \vec{r} \pm \omega\ t).$$

Mit $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$ und der Komponente von $\vec{r}$ in Richtung $\vec{n}$, $d = \vec{r} \cdot \vec{n}$, erhält man

$$\psi = f(k\ d \pm \omega\ t),$$



d.h. eine Welle, die sich mit der Zeit in positive oder negative $\vec{k}$ - Richtung ausbreitet.
Zu fester Zeit t genügen Punkte konstanter Phase der Gleichung

$$\vec{k}\,\vec{r} = const.$$

Im 3 - dimensionalen Raum ist dies die Gleichung einer Ebene senkrecht zu $\vec{k}$ im Abstand $d = \vec{k}\ \vec{r}/\ k$ vom Ursprung. Eine ebene Welle, die sich in x - Richtung ausbreitet, wird durch

$$\psi = f(k\ x \pm \omega\ t),$$

beschrieben.

Kugelwellen

Die Wellengleichung

$$\Delta\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

lautet in Kugelkoordinaten (vgl. Abschnitt 11.7)

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Bei Kugelsymmetrie hängt die Wellenfunktion nicht von den Winkeln ab. Die Ableitungen nach den Winkeln verschwinden und es verbleibt als Wellengleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Die Substitution

$$u(r,t) = r\cdot\psi(r,t)$$

führt auf die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

mit der Lösung

$$u = f(k\ r \pm \omega\ t).$$

Daraus folgt die Wellenfunktion

$$\psi = \frac{1}{r}f(k\ r \pm \omega\ t).$$

Die Punkte konstanter Phase zur festen Zeit t_0 bilden Kugeloberflächen, beschrieben durch

$$r = \frac{const \mp \omega\, t_0}{k}.$$

Die Amplitude nimmt bei fester Zeit mit $1/r$ ab.

Stehende Wellen

Überlagern sich zwei entgegengesetzt laufende Wellen ψ_+ und ψ_- gleicher Wellenlänge, Frequenz und Amplitude, so bilden sich stehende Wellen aus, z. B. :

$$\begin{aligned} \psi &= \sin(k\,x - \omega\,t) + \sin(k\,x + \omega\,t) \\ &= 2\ \sin k\,x\ \cos\omega\,t. \end{aligned}$$

Man sieht, daß das Resultat keine Welle mehr darstellt, sondern eine Schwingung. Für konstante Zeit ändert sich die Amplitude in diesem Beispiel mit dem Ort wie eine Sinusfunktion. Jeder Punkt schwingt harmonisch mit der Zeit. Die schwingende Seite ist ein typisches Beispiel für eine stehende Welle. Zu stehenden Wellen im 2 - oder 3 - dimensionalen Raum wird man z. B. über die Schwingungen eingespannter Platten oder die Schwingungen von Luft in Hohlräumen geführt.