Kapitel 9

Differentialgleichungen

9.1 Einteilung der Differentialgleichungen

In einer Differentialgleichung (DGl) treten Differentialquotienten von einer oder mehreren Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen auf. Die Lösung der DGl besteht in der Bestimmung der in der DGl auftretenden Funktionen. Bei *gewöhnlichen* Differentialgleichungen ist eine Funktion $y(x)$ *einer* unabhängigen Veränderlichen x zu bestimmen. Wenn die gesuchte Funktion von *mehreren* Veränderlichen abhängt, heißt die DGl *partielle* Differentialgleichung.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist von der Form

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots y^{(n)}(x)\right) = 0$$

Als Ordnung der Differentialgleichung wird die Ordnung des höchsten auftretenden Differentialquotienten (n) bezeichnet. Ist die Differentialgleichung darstellbar als Polynom in der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen, so wird als Grad der Differentialgleichung die höchste Summe der Exponenten der abhängigen Veränderlichen (y) und ihrer Ableitungen in einem Glied des Polynoms bezeichnet. In Differentialgleichungen 1. Grades (lineare Differentialgleichungen) treten die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen nur in der 1. Potenz, also nicht miteinander multipliziert auf.

Zur Bestimmung der Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung sind alle n-mal stetig differenzierbaren Funktionen zu finden, die die Differentialgleichung erfüllen. Es sind n verschiedene Funktionen. Die allgemeine Lösung enthält n freie Integrationskonstanten, die bei Festlegung eine spezielle Lösung definieren.

9.2 Differentialgleichungen 1.Ordnung

Trennung der Veränderlichen. Differentialgleichungen der Form

$$g(y)\, y' = f(x)$$

lassen sich durch die Methode der Trennung der Veränderlichen lösen: Integriert man beide Seiten über dx, so erhält man

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx.$$

Abgekürzt schreibt man dies, indem man dadurch die Differentiale dx und dy definiert:

$$g(y)\, dy = f(x)\, dx.$$

Wegen $y' = \frac{dy}{dx}$ nennt man das formal die 'Trennung der Variablen'.

Bei Bezeichnung der Stammfunktionen mit

$$G(y) = \int g(y)\, dy \qquad F(x) = \int f(x)\, dx$$

ergibt sich als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$G(y) = F(x) + c$$

mit der frei wählbaren Integrationskonstanten c.
Lineare Differentialgleichungen. Lineare Differentialgleichungen 1.Ordnung haben die Form

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = r(x)$$

oder können auf diese Form gebracht werden. Bei der homogenen Differentialgleichung ($r(x) \equiv 0$)

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = 0$$

ist Trennung der Veränderlichen möglich:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx$$

Bei Bezeichnung der Stammfunktion der rechten Seite mit $P(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -P(x) + c_1 \\ y &= ce^{-P(x)} \end{aligned}$$

mit der frei wählbaren Konstanten c.
Variation der Konstanten: Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ($r(x) \not\equiv 0$) zu erhalten, verwendet man häufig die Methode der Variation der Konstanten. Man verwendet als Lösungsansatz die Lösung der homogenen Differentialgleichung, wobei jedoch die Konstante durch eine zu bestimmende Funktion ersetzt wird:

$$y = C(x)\,e^{-P(x)}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$C'(x) = r(x)\,e^{P(x)}$$

und durch Integration erhält man die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_{x_0}^{x} r(t)e^{P(t)}\,dt \\ y(x) &= e^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} r(t)\,e^{P(t)}\,dt \end{aligned}$$

9.3 Lineare Differentialgleichungen

Die allgemeine Form der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ für eine Funktion $x = x(t)$ lautet:

$$a_n \frac{d^{(n)}x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Für lineare Differentialgleichungen (Ableitungen treten nur linear auf) gelten Superpositionssätze:
Sei $x_h(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($f(t) \equiv 0$), und $x_i(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ($f(t) \not\equiv 0$), so ist $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.
Wenn $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen zu $f(t) = f_1(t)$ bzw. $f(t) = f_2(t)$ sind, so ist $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ eine Lösung zu $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.
Für die homogene Differentialgleichung führt der Ansatz

$$x(t) = Ae^{\mu t}$$

auf die "charakteristische Gleichung"

$$a_n\mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + \ldots + a_1\mu + a_0 = 0.$$

Sind die n im allgemeinen komplexen Lösungen dieser Gleichung $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ verschieden, so erhält man die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung mit

$$x(t) = A_1e^{\mu_1 t} + A_2e^{\mu_2 t} + \ldots + A_{n-1}e^{\mu_{n-1} t} + A_ne^{\mu_n t}.$$

Die n Integrationskonstanten A_1, $A_2 \ldots A_{n-1}$, A_n werden durch spezielle Bedingungen, z.B. die Werte von $x(t)$ und der $n-1$ Ableitungen bei $t=0$ (Anfangsbedingungen), festgelegt.
Mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung: Wenn μ_1 und μ_2 zwei verschiedene Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind, dann sind zwei zugehörige spezielle Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{\mu_1-\mu_2}\, e^{\mu_1 t} \qquad \text{und} \\ x_2(t) &= \tfrac{1}{\mu_1-\mu_2}\, e^{\mu_2 t} \end{aligned}$$

und damit auch die Linearkombination

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{\mu_1-\mu_2}\, e^{\mu_1 t} - \tfrac{1}{\mu_1-\mu_2}\, e^{\mu_2 t} \\ &= \tfrac{e^{\mu_1 t}-e^{\mu_2 t}}{\mu_1-\mu_2}. \end{aligned}$$

Für $\mu_1 \to \mu_2 = \mu$ erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\mu_1\to\mu_2} x(t) &= \lim_{\mu_1\to\mu_2} \frac{e^{\mu_1 t}-e^{\mu_2 t}}{\mu_1-\mu_2} \\ &= \tfrac{d}{d\mu}\, e^{\mu t} \\ &= t\, e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Für r-fache Wurzeln sind entsprechend die r Lösungen

$$e^{\mu t},\ t\, e^{\mu t}, \ldots t^{r-1}\, e^{\mu t}.$$

Homogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Die Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

mit positiven Konstanten m, λ und k beschreibt die freie Bewegung eines schwingungsfähigen Systems. Der Ansatz

$$x(t) = Ae^{\mu t}$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$m\mu^2 + \lambda\mu + k = 0,$$

für die Variable μ mit den Wurzeln

$$\mu_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{D}}{2m} \qquad D = \lambda^2 - 4mk$$

Je nach dem Vorzeichen von D bzw. dem Wert von λ ergeben sich Lösungen mit unterschiedlichen Eigenschaften:
1) Keine Dämpfung ($\lambda = 0$). Beide Wurzeln sind rein imaginär:

$$\mu_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4mk}}{2m} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0 \qquad \text{mit} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Die Lösung

$$x(t) = A_1 e^{+i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$$

stellt eine harmonische Schwingung mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpft schwingenden Systems dar. Die beiden Integrationskonstanten A_1 und A_2 können bestimmt werden, wenn die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ gegeben sind. Aus der Lösung und ihrer Ableitung für $t = 0$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= x_0 \\ i\omega_0 A_1 - i\omega_0 A_2 &= \dot{x}_0, \end{aligned}$$

das gelöst wird durch:

$$A_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{\dot{x}_0}{2i\omega_0} \qquad A_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{\dot{x}_0}{2i\omega_0}$$

Damit ergibt sich zu den gegebenen Anfangsbedingungen die Lösung

$$x(t) = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{\dot{x}_0}{2i\omega_0}\right) e^{+i\omega_0 t} + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{\dot{x}_0}{2i\omega_0}\right) e^{-i\omega_0 t} = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

2) Schwache Dämpfung (λ klein). Bei kleinem Wert von λ ist $D < 0$ und beide Wurzeln sind komplex:

$$\mu_{1,2} = \frac{-\lambda}{2m} \pm i\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right) - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega$$

$$\text{mit} \qquad \gamma = \frac{\lambda}{2m} \qquad \text{und} \qquad \omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

Die Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

stellt eine gedämpfte harmonische Schwingung dar; die Schwingungen erfolgen mit der Frequenz $\omega < \omega_0$, wobei die Amplitude exponentiell abnimmt.

3) Starke Dämpfung(λ groß). Bei großem Wert von λ ist $D > 0$ und beide Wurzeln sind reell und zwar negativ:

$$\mu_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Die Lösung

$$x(t) = A_1 e^{\mu_1 t} + A_2 e^{\mu_2 t}$$

stellt einen aperiodisch abklingenden Vorgang dar, bei dem keine Oszillationen um 0 auftreten.

Für $D = 0$ wird $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ und man erhält die Lösungen $e^{\mu t}$ und $te^{\mu t}$, und damit als allgemeine Lösung

$$x(t) = A_1 e^{\mu t} + A_2 t e^{\mu t}$$

In allen Fällen ist die Lösung eindeutig durch die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ bestimmt. Gäbe es nämlich eine zweite Lösung $y(t)$, die der Differentialgleichung genügt mit den gleichen Anfangsbedingungen, dann wäre auch $z(t) = x(t) - y(t)$ eine Lösung und zwar mit den Anfangsbedingungen $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = 0$. Durch Multiplikation der Differentialgleichung für z,

$$m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = 0$$

mit $2\dot{z}$ erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{z}^2\right) + 2\lambda\dot{z}^2 + \frac{d}{dt}\left(kz^2\right) = 0$$

Integration dieser Gleichung zwischen $t = 0$ und $t = \tau$ bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen liefert

$$m\dot{z}^2(\tau) + 2\lambda\int_0^\tau \dot{z}^2\,dt + kz^2(\tau) = 0$$

Da alle Ausdrücke quadratisch und daher nichtnegativ sind, folgt $z(t) \equiv 0$, womit die Eindeutigkeit der Lösung $x(t)$ gezeigt ist.

Inhomogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung: Für die Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

ergibt sich die allgemeine Lösung gemäß dem Superpositionssatz als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen und einer speziellen (partikulären) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Eine spezielle Lösung kann wiederum durch Variation der Konstanten ermittelt werden.

Periodische Inhomogenität: Betrachtet wird der Spezialfall der Funktion

$$f(t) = F_0\cos\omega_f t = F_0\Re\left(e^{i\omega_f t}\right)$$

Bei dieser periodischen Funktion von t wird sich nach Abklingen anfänglicher Störungen eine stationäre Lösung der Form

$$x(t) = Ce^{i\omega_f t}$$

einstellen. Einsetzen dieses Lösungsansatzes in die Differentialgleichung liefert für die Amplitude C die Bedingung

$$C\left(-\omega_f^2 + 2\gamma i\omega_f + \omega_0^2\right) = \frac{F_0}{m}$$

Die komplexe Amplitude C kann dargestellt werden durch

$$C = \frac{F_0}{m} A e^{-i\delta}$$

mit reeller Amplitude A und Phasenverschiebung $\delta (0 \leq \delta \leq \pi)$, und damit ergibt sich als spezielle stationäre Lösung

$$x(t) = \frac{F_0}{m} A e^{i(\omega_f t - \delta)} \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \qquad \text{und} \qquad \tan\delta = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$

Betrachtung von Spezialfällen.
1) Statischer Grenzfall ($\omega_f \to 0$). In diesem Grenzfall gilt $\delta \to 0$ und die Lösung

$$x(t) \to \frac{F_0}{k}$$

hängt nicht von der Dämpfungskonstanten λ ab.
2) Energieresonanz. Bei $\omega_f = \omega_0$ wird die Phasenverschiebung $\delta = \pi/2$ und die Amplitude $A = 1/2\gamma\omega_0$, die Lösung wird damit

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\gamma\omega_0} e^{i(\omega_0 t - \pi/2)}$$

3) Grenzfall hoher Frequenzen. Für $\omega_f \to \infty$ wird die Phasenverschiebung $\delta = \pi$ (erregende Kraft und Schwingung gegenläufig) und die Amplitude wird klein:

$$A \to \frac{1}{\omega_f^2} \qquad\qquad x(t) \to \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_f^2} e^{i(\omega_f t - \pi)}$$

4) Extremwerte der Amplitude. Die Bedingung $dA/d\omega_f = 0$ liefert

$$-(\omega_0^2 - \omega_f^2)\omega_f + 2\gamma^2\omega_f = 0$$

Für $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ (schwache Dämpfung) erhält man ein Maximum der Amplitude bei

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$$

und ein Minimum bei $\omega_f = 0$. Bei starker Dämpfung, d.h. $2\gamma^2 > \omega_0^2$, gibt es nur ein Maximum der Amplitude bei $\omega_f = 0$.
Nicht-periodische Inhomogenität: Ist die Inhomogenität $f(t)$ ein Polynom in t, so wählt man als Lösungsansatz für die spezielle Lösung der Differentialgleichung ein Polynom genügend hohen Grades:

$$x(t) = C_0 \, + \, C_1 \, t \, + \, C_2 \, t^2 \, + \ldots + \, C_m \, t^m$$

Die Koeffizienten C_i werden durch Einsetzen von $x(t)$ in die Differentialgleichung bestimmt.