

Kapitel 8

Integralrechnung

8.1 Integration von Funktionen einer Veränderlichen

Die Funktion $f(x)$ sei eine für $x \in (a, b)$, $a < b$ stetige (oder stückweise stetige Funktion). Das Intervall (a, b) wird durch eine Intervalleinteilung Z in n Teilintervalle eingeteilt, mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

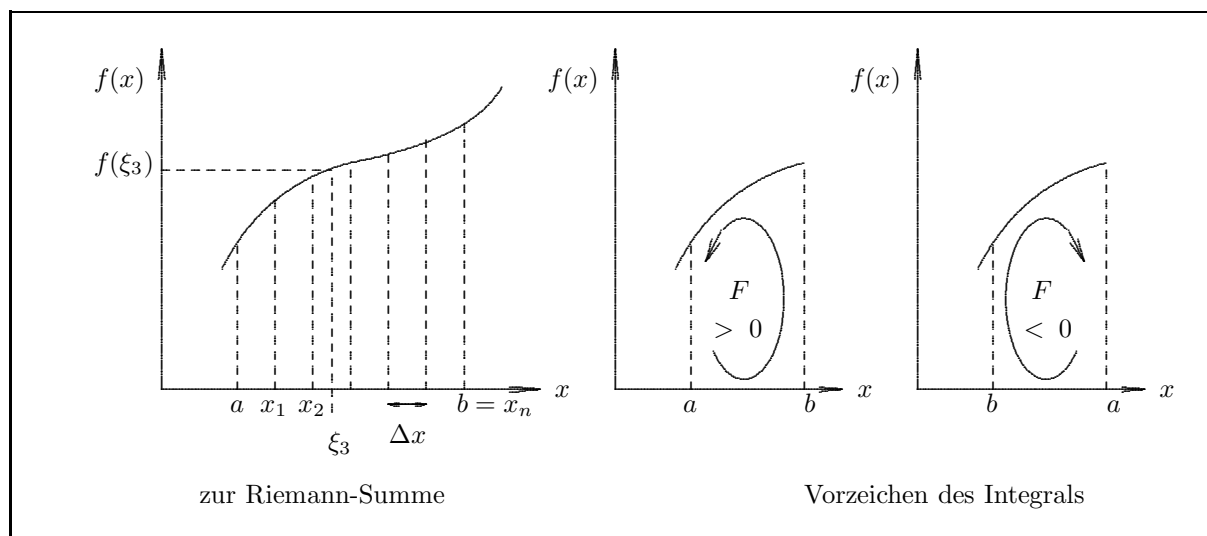
mit der Breite der Teilintervalle $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Man nennt

$$\sum_{i \in Z} f(\xi_i) \Delta x_i$$

mit Funktionswerten $f(\xi_i)$ an Zwischenstellen $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ die Riemann-Summe. Die Größe

$$F = \int_a^b f(x) dx = \lim_{Z \rightarrow \infty} \sum_{i \in Z} f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt bestimmtes Integral, wenn der Limes existiert und von der Wahl der Z -Folge unabhängig ist. Im Integral heißt $f(x)$ der Integrand und x die Integrationsvariable. Wenn $f(x) > 0$ für $x \in (a, b)$ ist, entspricht das bestimmte Integral der Fläche zwischen der Kurve $f(x)$ und der x -Achse zwischen den Grenzen a und b . Das bestimmte Integral hat folgende Eigenschaften:



$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung. Ist $f(x)$ eine in (a, b) stetige Funktion, so ist bei jeder Wahl von c und $x \in (a, b)$

$$F(x) = \int_c^x f(u) du$$

eine differenzierbare Funktion der oberen Grenze x und es gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Die Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion der Funktion $f(x)$. Das unbestimmte Integral ist

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(u) du + c$$

wobei die Größe c eine willkürliche Konstante ist. Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion ist, also

$$F(x) = \int_a^x f(u) du + c,$$

so gilt für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a)$$

Tabelle von Integralen (die Integrationskonstante ist weggelassen):

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} & n \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| \\ \int (x+a)^n dx &= \frac{1}{n+1} (x+a)^{n+1} \\ \int \frac{1}{x+a} dx &= \ln |x+a| \\ \int \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \arctan \frac{x}{a} \\ \int \frac{1}{a^2-x^2} dx &= \operatorname{artanh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x} & |x| < a \\ &= \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+a}{x-a} & |x| > a > 0 \\ \int \sqrt{x^2+a^2} dx &= +\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} \\ \int \sqrt{x^2-a^2} dx &= -\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} \\ \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= -\frac{1}{2} a^2 \arccos \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx &= \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} = \pm \ln \left(\pm \frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx &= \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} = \pm \ln \left(\frac{x}{a} \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} \\ \int \sin x dx &= -\cos x \\ \int \cos x dx &= +\sin x \\ \int \tan x dx &= -\ln |\cos x| \\ \int \cot x dx &= +\ln |\sin x| \\ \int \sin^2 ax dx &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax \\ \int \cos^2 ax dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax \\ \int \sin ax \cos ax dx &= \frac{1}{2a} \sin^2 ax \\ \int \frac{1}{\sin^2 ax} dx &= -\frac{1}{a} \cot ax \\ \int \frac{1}{\cos^2 ax} dx &= +\frac{1}{a} \tan ax \\ \int \tan^2 ax dx &= +\frac{\tan ax}{a} - x \\ \int \cot^2 ax dx &= -\frac{\cot ax}{a} - x \\ \int \arcsin \frac{x}{a} dx &= x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} \\ \int \arccos \frac{x}{a} dx &= x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} \\ \int \arctan \frac{x}{a} dx &= x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2+x^2) \\ \int \operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx &= x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2+x^2) \\ \int e^x dx &= e^x \\ \int x e^x dx &= e^x (x-1) \\ \int x^2 e^x dx &= e^x (x^2-2x+2) \\ \int \sinh x dx &= \cosh x \\ \int \cosh x dx &= \sinh x \end{aligned}$$

Integrationsregeln. Regeln für die Integration folgen durch Umkehrung aus den Differentiationsregeln. Wichtige Regeln sind die Regeln für die partielle Integration und die Substitution von Veränderlichen.

Partielle Integration: Aus der Produktregel $(u \cdot v)' = uv' + u'v$ der Differentialrechnung für Funktionen $u = f(x)$ und $v = g(x)$ ergibt sich die Regel der partiellen Integration:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Diese Regel läßt sich anwenden, wenn der Integrand auf die Form des linken Integrals gebracht werden kann. Eventuell muß die Formel wiederholt angewendet werden.

Substitutionsregel: Ausgehend von der Transformation der Veränderlichen

$$x = g(u) \quad dx = g'(u) du$$

ergibt sich die Regel

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) g'(u) du$$

Beim bestimmten Integral sind die Grenzen der Umkehrfunktion $u = g^{-1}(x) = h(x)$ einzusetzen:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(g(u)) g'(u) du$$

Eine andere Form der Regel ergibt sich durch Vertauschen von x und u :

$$h'(x) dx = \frac{dh}{dx} dx = dh$$

$$\int f(h(x)) h'(x) dx = \int f(h) dh$$

Diese Form wird angewendet, wenn sich der Integrand (Funktion von x) in der Form des linken Integrals ausdrücken läßt. Das bestimmte Integral ist:

$$\int_a^b f(h(x)) h'(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(h) dh$$

Tabelle von Substitutionen:

Funktion	h	dx
$f(a + bx)$	$a + bx$	dh/b
$f(e^x + e^{-x})$	e^x	dh/h
$f(\ln x)$	$\ln x$	$e^h dh$
$R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ *)	$\sqrt[n]{ax+b}$	$n h^{n-1} dh / h$
$R(\sin x, \cos x)$	$\tan \frac{x}{2}$	$2 dh / (1 + h^2)$
$R(\sin x, \cos x)$ für unger. Fkt. v. $\sin x$	$\cos x$	$-dh / \sqrt{1 - h^2}$
$R(\sin x, \cos x)$ für unger. Fkt. v. $\cos x$	$\sin x$	$dh / \sqrt{1 - h^2}$
$R(\sin x, \cos x)$ für unger. Fkt. v. $\sin x$ u. $\cos x$	$\tan x$	$dh / (1 + h^2)$

*) Rationale Funktion R

8.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung

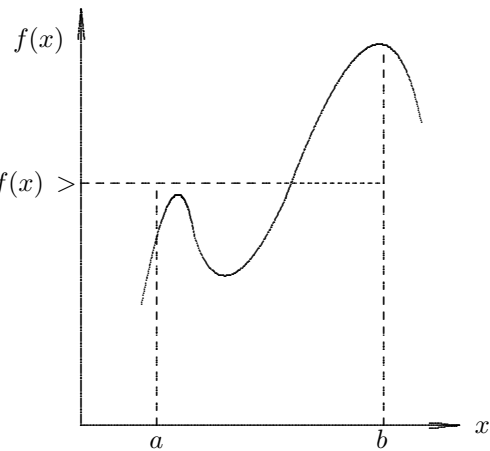
Ist $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar und stetig, so gibt es einen Mittelwert $\langle f(x) \rangle$, für den gilt:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

Allgemeiner erhält man das gewichtete Mittel mit der stetigen Gewichtsfunktion $g(x)$

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

Der Mittelwert wird auch durch das 1. Glied in der Taylorentwicklung bei einer Entwicklung bis zu diesem Glied wiedergegeben.



8.3 Taylorentwicklung

Die Umformung des Integrals in der Identität

$$f(x) = f(\xi) + \int_{\xi}^x f'(t) dt$$

durch partielle Integration führt auf:

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \int_{\xi}^x (x - t)f''(t) dt.$$

Die wiederholte Umformung des Integrals liefert die Taylorformel

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{1}{2}(x - \xi)^2 f''(\xi) + \frac{1}{2 \cdot 3}(x - \xi)^3 f'''(\xi) + \dots + \frac{1}{n!}(x - \xi)^n f^{(n)}(\xi) + R_n(x),$$

wobei das Restglied $R_n(x)$ die Form

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{\xi}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

hat. Eine andere Form des Restgliedes (Lagrange-Form) ist

$$R_n(x) = \frac{(x - \xi)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\vartheta)$$

mit ϑ zwischen ξ und x .

Wenn die Funktion $f(x)$ unendlich oft differenzierbar ist, führt die Taylorformel mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - \xi)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

auf die Darstellung der Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe (Taylor-Reihe); Voraussetzung ist, daß das Restglied R_n für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Einige Reihenentwicklungen:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots & |x| < \frac{\pi}{2} \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots & -1 < x \leq +1 \end{aligned}$$

8.4 Integralfunktionen

Die normalen Integrationsmethoden führen nicht immer zum Ziel. Es gibt schon relativ einfache Funktionen, für die die Stammfunktion nicht mehr in geschlossener Form angegeben werden kann. Wenn eine solche Funktion bei vielen Problemen auftritt, so wird durch das Integral über die Funktion eine neue Funktion (Integralfunktion) definiert, die man in Tabellenwerken tabelliert finden kann:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Beispiele für Integralfunktionen sind:

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt && \text{Fehlerfunktion} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots \right) && \text{für } x \ll 1 \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2} + \dots && \text{für } x \gg 1 \\ F(k; x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} && \text{elliptisches Integral (erster Gattung)} \\ \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt && \text{Gamma-Funktion} \end{aligned}$$

Die Fehlerfunktion tritt in der Statistik auf, das elliptische Integral bei der mathematischen Behandlung von Pendelschwingungen.

8.5 Numerische Berechnung von Integralen

Die allgemeine Form der Integrationsformeln für die numerische Berechnung von Integralen ist

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_k w_k f(x_k)$$

Dabei sind x_k Abszissenwerte des Intervalls $[a, b]$ und w_k zugeordnete Gewichte.

Sehnentrapezregel. Das Intervall $[a, b]$ wird in n Teilabschnitte eingeteilt:

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b \\ h &= \frac{b-a}{n} & x_k &= a + k h & k &= 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

In einem Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ wird das Integral durch das Sehnentrapez $[f(x_k) + f(x_{k+1})]h/2$ angenähert; für das gesamte Integral ist die Näherung

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

Die Formel ist exakt, wenn $f(x)$ eine lineare Funktion ist.

Keplersche Faßregel. Durch drei Punkte $x = a, (a+b)/2$ und b wird eine Parabel gelegt und diese Parabel wird integriert; das Ergebnis ist eine Näherung des Integrals:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Die Formel ist exakt nicht nur für quadratische Funktionen, sondern auch für Polynome 3. Ordnung.

Simpson-Regel. Diese Regel ergibt sich aus der Keplerschen Faßregel durch Anwendung auf $2m$ gleichlange Teilabschnitte des Intervalls $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{2m-1}) + f(b)]$$

$$x_k = a + k \frac{b-a}{2m} \quad k = 0, 1, \dots, 2m$$

Bei gleicher Zahl von Teilpunkten liefert die Simpson-Regel im allgemeinen genauere Werte als die Sehnentrapezregel.

8.6 Uneigentliche Integrale

Integrale, bei denen eine (oder beide) Grenzen $-\infty$ oder $+\infty$ sind oder bei denen der Integrand an einer Grenze undefiniert ist, nennt man uneigentliche Integrale. Das Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

heißt konvergent, wenn der Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx$$

existiert und endlich ist. Entsprechend gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Formeln ($n \geq 0$ und $a > 0$):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \\ \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^{n+1/2}} \sqrt{\pi} \\ \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx &= \frac{n!}{2a^{n+1}} \end{aligned}$$

8.7 Integration von Funktionen mehrerer Variablen

8.7.1 Kurvenintegral über skalares Feld

Gegeben sei das skalare Feld $F(x, y, z)$, das jedem Punkt (x, y, z) die skalare Größe F zuordnet. Ebenfalls gegeben sei eine Kurve C zwischen den Punkten A und B . Das Kurvenintegral (oder Linienintegral) über $F(x, y, z)$ längs der Kurve C ist definiert als Grenzwert der Riemann-Summe über die Wegelemente ds von C , multipliziert mit den zugehörigen Feldwerten. Der Ort längs des Weges wird durch die Variable s beschrieben.

$$\int_{A,C}^B F(s) ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_C F(s_i) \Delta s_i$$

Der Wert des Kurvenintegrals hängt bei vorgegebenem Feld F im allgemeinen vom Anfangspunkt A , vom Endpunkt B und von der Form der Kurve C zwischen A und B ab. Es gilt

$$\int_{A,C}^B F(s) ds = - \int_{B,C}^A F(s) ds$$

Geschlossene Wege werden durch das Zeichen Kurvenintegral $\oint_C$ dargestellt.

Zur Berechnung wird das Kurvenintegral auf ein gewöhnliches Integral zurückgeführt. Wird der Weg C eindeutig durch die Variable x beschrieben, ergibt sich

$$\int_{A,C}^B F(s(x, y, z)) ds = \int_{A(x),C}^{B(x)} F(s(x, y(x), z(x))) \frac{ds}{dx} dx$$

mit

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \text{ d. h.}$$

$$\int_{A,C}^B F(s(x, y, z)) ds = \int_{x_A,C}^{x_B} F(s(x, y(x), z(x))) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

8.7.2 Kurvenintegral über Vektorfeld

Das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ längs der Kurve C zwischen den Orten $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$ ist definiert durch

$$\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \lim_{\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0} \sum_C \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta \vec{r}_i$$

Bei geschlossener Kurve ($\vec{r}_a = \vec{r}_b$) liefert das Kurvenintegral

$$\oint_C \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}$$

die **Zirkulation** von $\vec{A}$ entlang der Kurve C .

Die Berechnung geschieht durch Umwandlung in gewöhnliche Integrale, z. B.:

a) $\vec{r} = \vec{r}(s)$ längs C mit $ds = |d\vec{r}|$ ergibt

$$\int \vec{A}(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \int \vec{A}(\vec{r}(s)) \vec{u}_T ds = \int A_T ds$$

Der Tangenteneinheitsvektor ist durch $\vec{u}_T$ und die Tangentialkomponente von $\vec{A}$ durch A_T gegeben.

b) Mit $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ folgt

$$\int \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \int A_x(\vec{r}) dx + \int A_y(\vec{r}) dy + \int A_z(\vec{r}) dz$$

Die Variablen x, y, z hängen über den Weg C voneinander ab. Die Parameterdarstellung des Weges

$$\begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= z(s) \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{s_a}^{s_b} A_x(\vec{r}(s)) dx + \int_{s_a}^{s_b} A_y(\vec{r}(s)) dy + \int_{s_a}^{s_b} A_z(\vec{r}(s)) dz \\ &= \int_{s_a}^{s_b} A_x(\vec{r}(s)) \frac{dx}{ds} ds + \int_{s_a}^{s_b} A_y(\vec{r}(s)) \frac{dy}{ds} ds + \int_{s_a}^{s_b} A_z(\vec{r}(s)) \frac{dz}{ds} ds \end{aligned}$$

Ist x selbst die unabhängige Variable, so erhält man

$$\int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} A_x(x, y(x), z(x)) dx + \int_{x_a}^{x_b} A_y(x, y(x), z(x)) \frac{dy}{dx} dx + \int_{x_a}^{x_b} A_z(x, y(x), z(x)) \frac{dz}{dx} dx$$

Für eine bestimmte Klasse von Vektorfeldern, die Gradientenfelder, hängt der Wert des Kurvenintegrals nur vom Anfangspunkt $\vec{r}_a$ und vom Endpunkt $\vec{r}_b$ ab und nicht von der Form der Kurve C zwischen den Punkten (siehe Vektoranalysis).

8.7.3 Gebietsintegrale

Integrale einer Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen x und y über ein zweidimensionales Gebiet der xy -Ebene sind definiert durch den Grenzwert von Riemann-Summen:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\Delta x_i, \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_Z f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

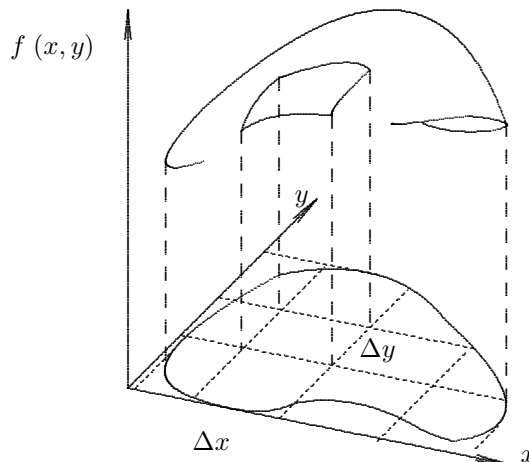
Dabei ist Z eine Intervalleinteilung des Gebiets G in kleine Gebiete (Rechtecke) mit den Seitenlängen Δx_i und Δy_i , die beim Grenzübergang gegen 0 gehen.

Für ein rechteckiges Gebiet G mit

$$G: \quad a \leq x \leq b \quad c \leq y \leq d$$

läßt sich das Gebietsintegral leicht auf zwei gewöhnliche Integrale zurückführen.

Das Integral von $f(x, y)$ über x zwischen a und b stellt eine Funktion von y dar, über die von c bis d über y



integriert werden kann (oder umgekehrte Reihenfolge):

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Das Integral in der ersten eckigen Klammern ist eine Funktion von y , das in der zweiten eine Funktion von x . Bei krummliniger Begrenzung des Integrationsgebietes G sind die Grenzen selbst wieder Funktionen von x bzw. y .

Entsprechendes gilt für Integrale in drei und mehr Dimensionen.

Transformationen. Durch Transformation der Veränderlichen ist es oft möglich, das Integrationsgebiet in ein rechteckiges Gebiet in den neuen Veränderlichen zu transformieren und damit die Integration zu vereinfachen. Dabei ist das Flächenelement $dx dy$ bzw. das Volumenelement $dx dy dz$ unter Berücksichtigung der Determinante $|J|$ der Funktionalmatrix der Transformation durch das transformierte Element $du dv$ bzw. $du dv dw$ zu ersetzen. Die Funktionaldeterminanten für die Koordinaten $x y$ einerseits und $u v$ andererseits lautet:

$$|J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{vmatrix}^{-1}$$

Allgemeine Formel für die Transformation von Koordinaten x und y in allgemeine Koordinaten u und v und für die entsprechenden Flächenelemente:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned} \quad |J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix} \quad dx dy = |J| du dv$$

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad |J| = r \quad dx dy = r dr d\varphi$$

Entsprechend gilt die allgemeine Formel für die Transformation von Koordinaten x, y , und z in allgemeine Koordinaten u, v und w und für die entsprechenden Volumenelemente:

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \quad |J| = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v & \partial x / \partial w \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v & \partial y / \partial w \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v & \partial z / \partial w \end{vmatrix} \quad dx dy dz = |J| du dv dw$$

Beispiele:

Räumliche Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad |J| = r^2 \sin \vartheta \quad \begin{aligned} dx dy dz &= r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= -r^2 dr d \cos \vartheta d\varphi \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad |J| = \rho \quad dx dy dz = \rho dz d\rho d\varphi$$