

Kapitel 7

Differentialrechnung

7.1 Definitionen und Ableitungen der elementaren Funktionen

Die Funktion $f(x)$ sei definiert für $a < x < b$. Die Funktion $f = f(x)$ ist in einem Punkt x des Intervalls differenzierbar, wenn der Grenzwert

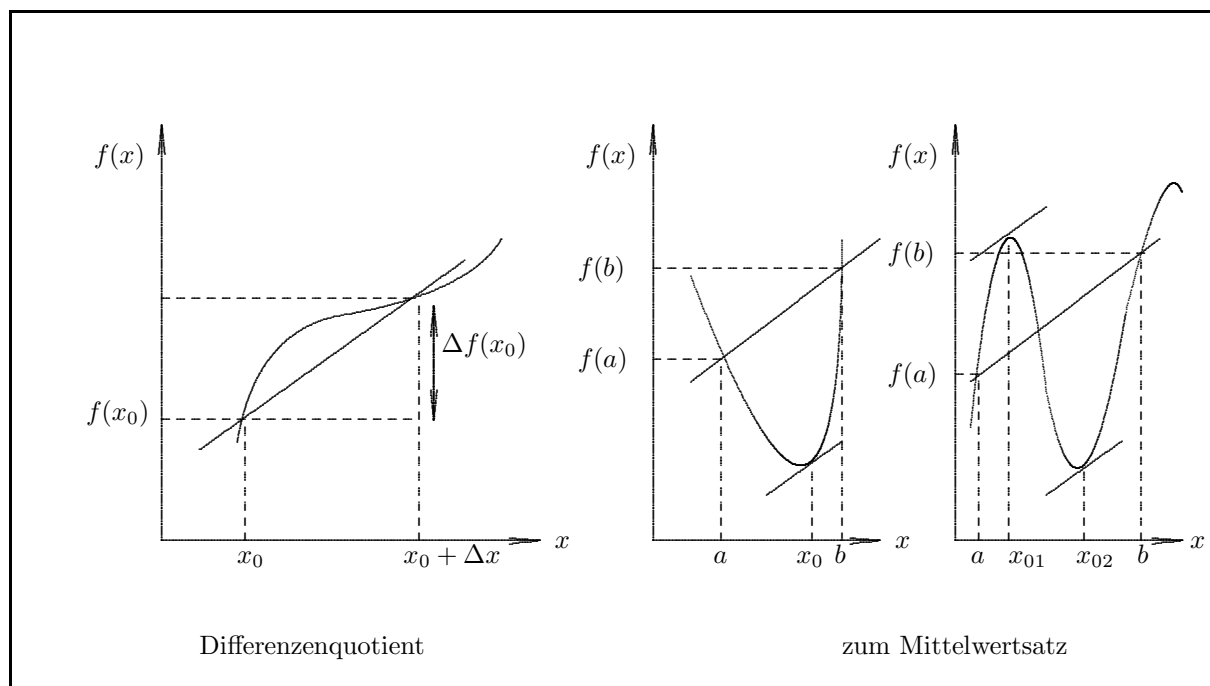
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

existiert; der Grenzwert $f'(x)$ des Differenzenquotienten heißt **Differentialquotient** oder **Ableitung** von f im Punkt x .

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante, die beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ zur Tangente wird, deren **Steigung** durch den Differentialquotienten gegeben ist. Wenn die Funktion $f(x)$ in einem Punkt x differenzierbar ist, so ist sie auch stetig. Für die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ schreibt man auch df/dx . Das Differential dy der Funktion $y = f(x)$ ist $dy = f'(x) dx$. Zur Kontrolle der Berechnung einer analytischen Ableitung $f'(x)$ durch eine numerische Rechnung ist die Näherung

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x}$$

nützlich.



Erste Ableitungen elementarer Funktionen

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
x	1	$1/x$	$-1/x^2$
x^2	$2x$	$1/x^2$	$-2/x^3$
x^n	nx^{n-1}	$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$
e^x	e^x	$\ln x$	$1/x$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$	$\arctan x$	$1/(1+x^2)$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x$	$\operatorname{arccot} x$	$-1/(1+x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\operatorname{arcosh} x$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$	$\operatorname{artanh} x$	$1/(1-x^2)$
$\coth x$	$-1/\sinh^2 x$	$\operatorname{arcoth} x$	$-1/(x^2-1)$

Die Differenzierbarkeit an einem Punkt x_0 ist gleichbedeutend mit der Approximierbarkeit der Funktion $f(x)$ durch einen linearen Ausdruck

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

wobei $f'(x_0)$ die Ableitung von $f(x)$ bei $x = x_0$ bedeuten soll. Genauer schreibt man:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|);$$

dabei ist $o(|\Delta x|)$ ein Ausdruck, der mit $|\Delta x|$ gegen Null geht (s. a. Taylorsche Formel, Abschn. 8.3). Der Ausdruck $o(|\Delta x|)$ steht für eine Funktion $\varphi(\Delta x)$ mit der Eigenschaft:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x)}{|\Delta x|} = 0.$$

Höhere Ableitungen: Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist definiert als die Ableitung der ersten Ableitung von $f(x)$, für höhere Ableitungen ist entsprechend zu verfahren. Als Bezeichnungen sind üblich, wenn $y \equiv y(x)$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \dots, \frac{d^{(n)} y}{dx^n} \quad \text{oder} \quad y'', y''', \dots, y^{(n)} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y, \left(\frac{d}{dx}\right)^3 y, \dots, \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)} y.$$

Aus formalen Gründen wird gelegentlich die nullte Ableitung eingeführt: $y^{(0)} = y$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Ist eine Funktion $f(x)$ für $a \leq x \leq b$ stetig und existiert die Ableitung in diesem Intervall, so gibt es wenigstens ein x_0 mit $a < x_0 < b$, für das gilt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Extrema: Notwendige Bedingung für ein Extremum einer Funktion $f(x)$, die an der Stelle x_0 als differenzierbar vorausgesetzt wird, ist $f'(x_0) = 0$. Für $f''(x_0) < 0$ liegt ein Maximum vor, für $f''(x_0) > 0$ ein Minimum. Bei $f''(x_0) = 0$ müssen die höheren Ableitungen untersucht werden; bei $f'''(x_0) \neq 0$ ist x_0 ein Wendepunkt.

7.2 Differentiationsregeln

Produkte und Quotienten

Die Funktionen $u = f(x)$ und $v = g(x)$ seien für $a < x < b$ definiert. Dann gilt für jedes x aus dem Intervall, für das u' und v' existiert:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= uv' + vu' && \text{Produktregel} \\ \left(\frac{1}{v}\right)' &= -\frac{v'}{v^2} && \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad v \neq 0 \quad \text{Quotientenregel} \end{aligned}$$

Formeln für höhere Ableitungen erhält man durch mehrfache Anwendungen der Formeln, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= u'v + uv' \\ (u \cdot v)'' &= u''v + 2u'v' + uv'' \\ (u \cdot v)''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \dots + \binom{n}{r}u^{(n-r)}v^{(r)} + \dots + uv^{(n)}$$

Für die Ableitung des Quotienten zweier Produkte folgt aus der Quotienten- und Produktregel die Formel:

$$\left(\frac{u \cdot v}{w \cdot z}\right)' = \left(\frac{u \cdot v}{w \cdot z}\right) \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} - \frac{w'}{w} - \frac{z'}{z}\right).$$

Kettenregel

Die Funktion $h(x) = f(g(x))$ ist aus den Funktionen $y = g(x)$ und $f(y)$ zusammengesetzt: $h = f \circ g$. Wenn bei einem gegebenen x die Ableitung $dy/dx = dg/dx = g'(x)$ existiert und bei dem entsprechenden y die Ableitung $df/dy = f'(y)$ existiert, dann gilt für die Ableitung von h nach x :

$$\frac{dh}{dx} = f'(y)g'(x) = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Das Differential von h , ausgedrückt durch y , ist $dh = f'(y)dy$ und das Differential von g , ausgedrückt durch x , ist $dy = dg = g'(x)dx$. Aus der Kettenregel folgt:

$$dh = f'(y)dy = f'(y)g'(x)dx$$

für das Differential dh , ausgedrückt durch x .

In Differentialen können unabhängige und abhängige Variable gleich behandelt werden. So folgt zum Beispiel für $y = f(x)$ aus $dy = f'(x)dx$ die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} von f :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \quad f'(x) \neq 0.$$

Für parametrische Gleichungen $x = f(t)$, $y = g(t)$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad f'(t) \neq 0.$$

Logarithmische Ableitung. Aus der Kettenregel folgt speziell für $w = h(u) = \ln u$ und $u = u(x)$:

$$\frac{d \ln u}{dx} = \frac{d \ln u}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad \text{oder kurz:} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Ableitung einer impliziten Funktion. Die Funktion $y = f(x)$ sei durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

definiert. Dann ergibt sich aus der partiellen Differentiation nach x und y :

$$F_x + F_y y' = 0 \quad y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

7.3 Grenzwert einer Funktion mit nicht definiertem Wert

Führt die Bildung des Grenzwerts einer Funktion $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ zu einem nicht definierten Ausdruck der Form

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{oder zu}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\infty}{\infty},$$

so erhält man den Grenzwert über

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \quad (\text{Regel von \textbf{Bernoulli - de l'Hospital}})$$

Falls andere nicht definierte Ausdrücke auftreten, kann durch geeignete Substitution diese Form immer erreicht werden:

<i>Funktion</i>	<i>undef. Grenzw.</i>	<i>Substitution</i>
$\varphi(x) \cdot \kappa(x)$	$0 \cdot \infty$	$\kappa(x) = 1/\psi(x)$
$\kappa(x) - \lambda(x)$	$\infty - \infty$	$\kappa(x) = 1/\psi(x); \lambda(x) = 1/\varphi(x)$
$\lambda(x)^{\psi(x)}; \lambda > 0$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$\lambda(x) = \exp(\varphi(x))$

7.4 Vektorwertige Funktionen

Die Ableitung einer vektorwertigen Funktion $\vec{r} = \vec{r}(t)$ eines skalaren Parameters t ist definiert durch

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

wenn der Grenzwert unabhängig von der Folge $\Delta t \rightarrow 0$ existiert. Die Ableitung, die auch in der Form

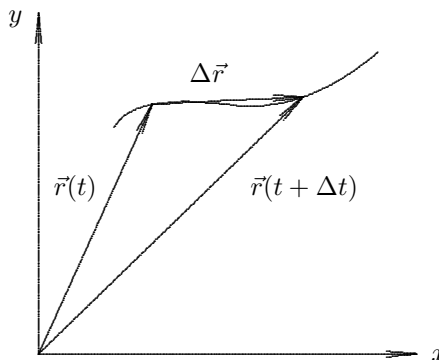
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

geschrieben werden kann, ist selbst wieder ein Vektor und ist tangential zur Kurve gerichtet, die durch $\vec{r}(t)$ beschrieben wird. Höhere Ableitungen sind entsprechend definiert. Wenn eine Bahnkurve durch eine vektorwertige Funktion $\vec{r}(t)$ beschrieben wird und der Parameter t die Zeit bedeutet, so sind die ersten beiden Ableitungen (Ableitungen nach der Zeit werden gelegentlich durch Punkte bezeichnet):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) && \text{Geschwindigkeitsvektor} \\ \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} &= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) && \text{Beschleunigungsvektor} \end{aligned}$$

Regeln für die Ableitung vektorwertiger Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) &= \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} \\ \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \\ \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} && \text{Produktregeln} \\ \frac{d}{dt} (f(t)\vec{a}(t)) &= f'(t)\vec{a} + f(t)\frac{d\vec{a}}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{a}(t)}{f(t)} \right) &= \frac{1}{f} \frac{d\vec{a}}{dt} - \frac{f'}{f^2} \vec{a} && \text{Quotientenregel} \quad (f(t) \neq 0) \end{aligned}$$



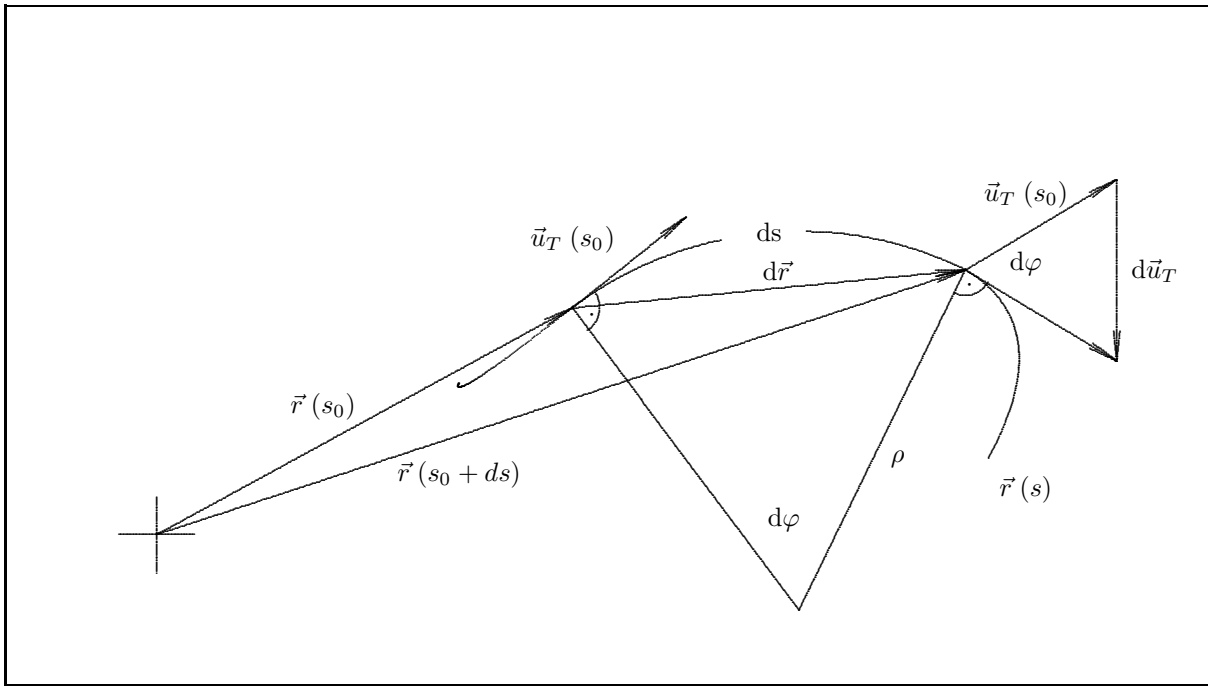
Folgerung: die Ableitung einer vektorwertigen Funktion $\vec{a}(t)$ mit konstantem Betrag ($\vec{a} \cdot \vec{a} = \text{const}$) steht senkrecht zu $\vec{a}$ (oder verschwindet):

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{a}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$$

Raumkurven

Eine glatte Raumkurve wird durch eine stetige und stetig differenzierbare vektorwertige Funktion $\vec{r}(t)$ beschrieben. Die Ableitung $d\vec{r}/dt$ zeigt jeweils in die tangentiale Richtung. Für geometrische Betrachtungen ist der Begriff der Bogenlänge geeignet. Für die Ableitung einer Raumkurve $\vec{r}(s)$ nach dem Parameter Bogenlänge s gilt:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}_T \quad \vec{u}_T = \text{Einheitsvektor in tangentialer Richtung}$$



Aus der Kettenregel folgt:

$$\frac{d\vec{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{u}_T \cdot \frac{ds}{dt}$$

Für die differentielle Änderung von $\vec{u}_T$ gilt:

$$|d\vec{u}_T| = d\varphi \cdot |\vec{u}_T|,$$

Für infinitesimale Winkel $d\varphi$ steht $d\vec{u}_T$ senkrecht auf $\vec{u}_T$.

Wegen $\rho d\varphi = ds$ wird die Ableitung des Einheitsvektors $\vec{u}_T$ nach s :

$$\frac{d\vec{u}_T}{ds} = \frac{d\vec{u}_T}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} \vec{u}_N = \kappa \cdot \vec{u}_N \quad \text{mit} \quad \vec{u}_N = \frac{d\vec{u}_T}{d\varphi}.$$

Darin ist $\vec{u}_N$ ein Einheitsvektor in der Kurvenebene senkrecht zu $\vec{u}_T$ in Krümmungsrichtung und $\rho = 1/\kappa$ der Krümmungsradius der Raumkurve ($\kappa = \text{Krümmung}$). Durch $\vec{u}_B = \vec{u}_T \times \vec{u}_N$ kann ein weiterer Einheitsvektor $\vec{u}_B$ definiert werden, der mit den beiden anderen Einheitsvektoren ein orthogonales Rechtssystem bildet, das 'begleitendes' Dreiein genannt wird. Es gilt:

$$\frac{d\vec{u}_B}{ds} = \frac{d\vec{u}_T}{ds} \times \vec{u}_N + \vec{u}_T \times \frac{d\vec{u}_N}{ds} = \vec{u}_T \times \frac{d\vec{u}_N}{ds} = -\tau \cdot \vec{u}_N.$$

Die Größe τ heißt Torsion und $1/\tau$ Windungsradius der Raumkurve. Die Torsion einer Kurve im Punkt P gibt an, in welchem Maß die Kurve in der Umgebung von P von einer ebenen Kurve abweicht.

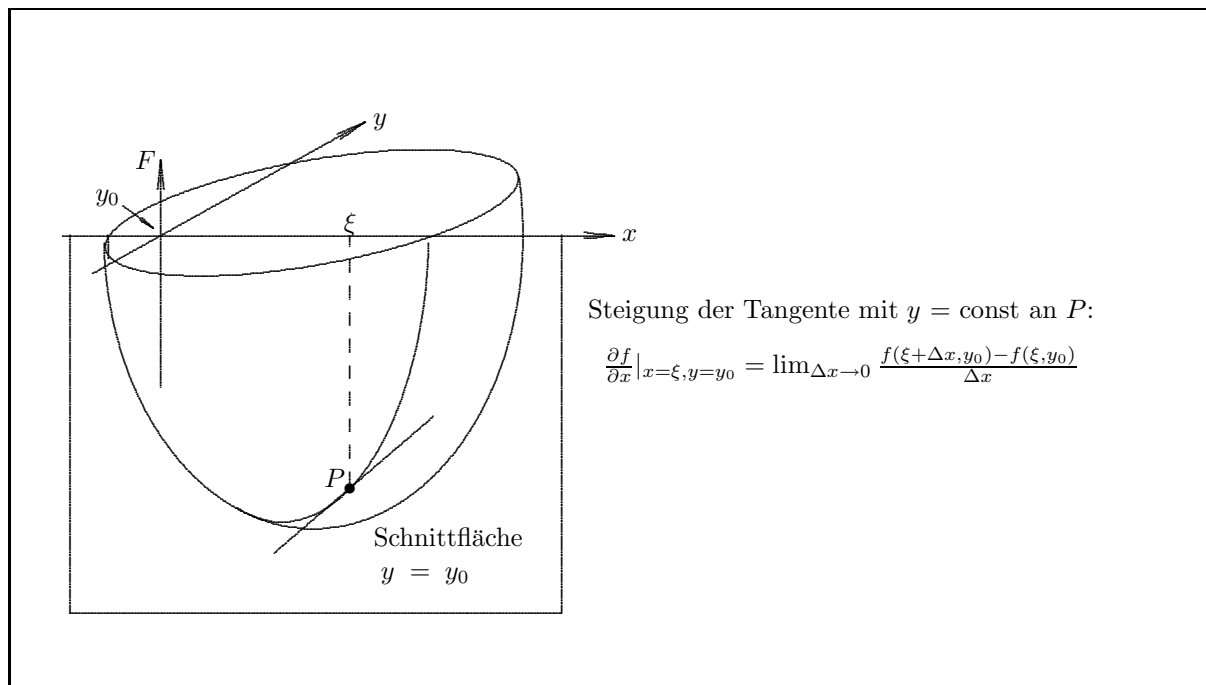
7.5 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Skalare Funktionen von zwei Veränderlichen

Eine Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen x und y wird betrachtet. Die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ nach den Veränderlichen x und y sind definiert durch:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$



Die partielle Ableitung nach einer Veränderlichen ist also nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung nach der einen Veränderlichen bei Festhalten der anderen. Es gelten Rechenregeln wie für die gewöhnlichen Ableitungen. Höhere partielle Ableitungen sind (entsprechend der gewöhnlichen Ableitungen) durch wiederholte Bildung der partiellen Ableitung zu erzeugen. Höhere Ableitungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Ableitungen nach verschiedenen Variablen unterscheiden, sind bei Stetigkeit gleich, zum Beispiel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Partielle Ableitungen werden auch wie folgt geschrieben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \text{etc.}$$

Totale Ableitung und totales Differential. Gegeben sei eine Funktion $f(x, y)$, bei der $x = x(t)$ und $y = y(t)$ Funktionen eines Parameters t sind. Zur Bildung der Ableitung von f nach t wird der Differenzenquotient betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{aligned}$$

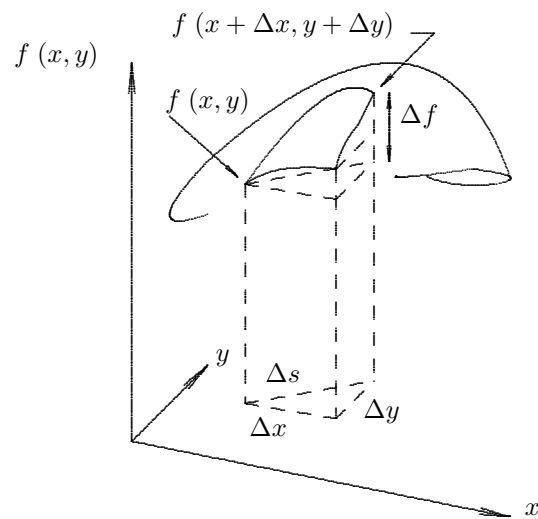
Im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ gehen auch $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta y \rightarrow 0$, und man erhält die totale Ableitung von f nach t :

$$\frac{df}{dt} = \frac{d f(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Den Ausdruck

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

nennt man totales Differential. Anschaulich bedeutet df die Änderung von f bei Änderung von x um dx und von y um dy .



Funktionen von n Veränderlichen

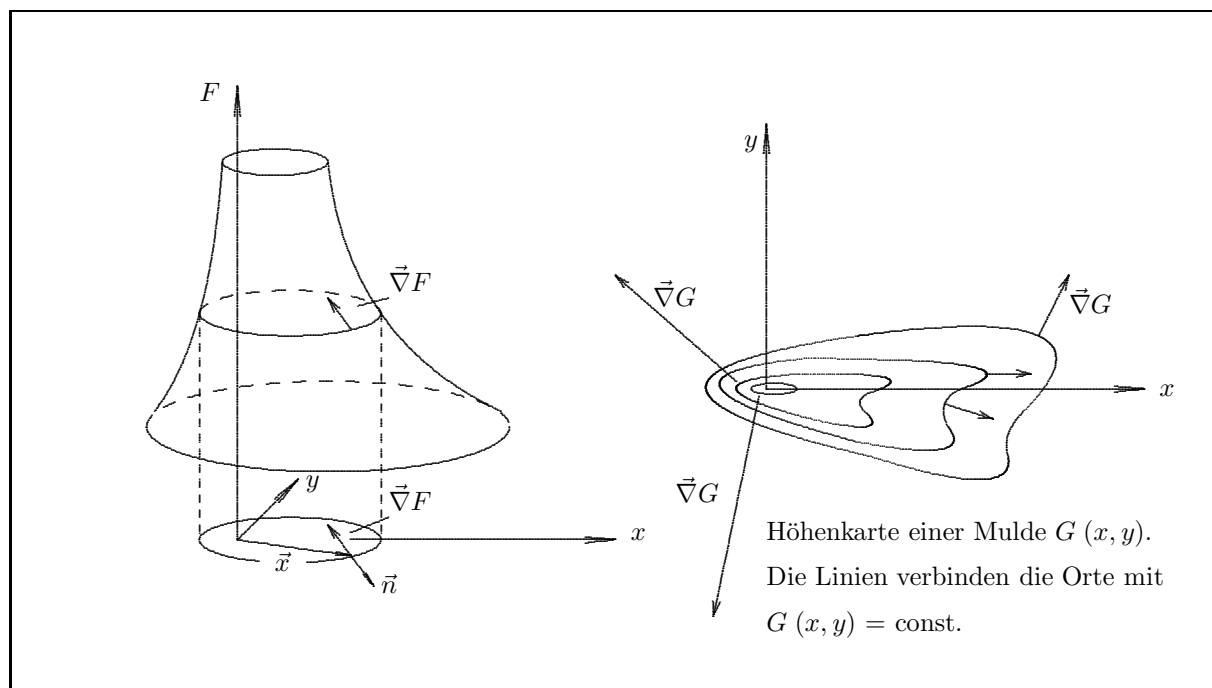
Betrachtet wird eine (skalare) Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von n Veränderlichen.

Ist ein beliebiger Weg $\vec{s}$ im Raum $x_1, x_2, \dots, x_n$ gegeben, so beschreibt $d\vec{s} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ ein Element auf diesem Weg.

Das totale Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

liefert dann die Änderung von f längs des Wegelements an einer gegebenen Stelle.



Mit der Definition des Gradienten, durch die vektorwertige Funktion

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

ergibt sich das totale Differential als Skalarprodukt

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{s}.$$

Die Einführung des Differentialoperators $\vec{\nabla}$ (Nabla)

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

gestattet die Schreibweise

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f.$$

In manchen Lehrbüchern findet man auch die symbolische Schreibweise $df/d\vec{s}$ anstelle von $\vec{\nabla} f$.

Funktionalmatrix

Betrachtet werden nun Funktionen $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})$, die zu einem Vektor $\vec{f}(\vec{x})$ zusammengefaßt werden können. Ist die (vektorwertige) Funktion $\vec{f}$ durch einen linearen Ausdruck approximierbar, erhält man:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + J_f \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|)$$

mit einer $m \cdot n$ Matrix J_f . Voraussetzung ist, daß $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}_0$ stetig ist und daß alle Komponenten f_i von $\vec{f}$ nach den x_j partiell differenzierbar sind mit

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = (J_f)_{ij}.$$

Man nennt die Matrix J_f ,

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

die **Funktionalmatrix** oder **Jacobi-Matrix** von $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}_0$.

Kettenregel. Die Funktion $\vec{h}$ sei aus der Funktion $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$ und der Funktion $\vec{f}(\vec{y})$ zusammengesetzt, und liefere eine Abbildung $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$:

$$\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g} \qquad \vec{h}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})).$$

Dann gilt für die Funktionalmatrix J_h der Funktion $\vec{h}(\vec{x})$ und die Spalten- und Zeilenzahlen der Funktionalmatrizen:

$$\underbrace{J_h}_{k \cdot n} = \underbrace{J_f}_{k \cdot m} \cdot \underbrace{J_g}_{m \cdot n}.$$

Umkehrabbildung. Die Funktion $\vec{f}(\vec{y})$ sei die Umkehrfunktion der Funktion $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$: $\vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) = \vec{x}$ mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$. Dann folgt aus der Kettenregel:

$$J_f \cdot J_g = E \qquad J_f = (J_g)^{-1}$$

(E = Einheitsmatrix).