Kapitel 6

Funktionen

6.1 Der Funktionsbegriff

Eine Funktion $f(x)$ ist durch eine Vorschrift f definiert, die jedem Element $x \in \mathbf{D}$ (Definitionsbereich) ein Element $f(x) \in \mathbf{W}$ (Wertebereich) zuordnet. Für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen sind $\mathbf{D}$ und $\mathbf{W}$ Teilmengen von $\mathbf{R}$, d.h. $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}$ und $\mathbf{W} \subset \mathbf{R}$. Aus zwei reellen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ lassen sich durch die Operationen $+ - \cdot /$ neue Funktionen definieren (soweit die Definitionsbereiche übereinstimmen):

$$\begin{array}{ll} f(x)+g(x) & f(x)\cdot g(x) \\ f(x)-g(x) & f(x)/g(x) \quad \text{bei} \quad g(x) \neq 0 \end{array}$$

Funktionen können 'verkettet' oder ineinander eingesetzt werden, z.B.

$$h(x) = f(g(x)) \qquad x \in \mathbf{D(g)} \qquad \mathbf{W(g)} \subset \mathbf{D(f)}$$

Man schreibt hierfür auch $h = f \circ g$.

Grenzwert von Funktionen

Wenn für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in \mathbf{D}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ die Folge $\{f(x_n)\}$ gegen einen festen Wert A konvergiert, dann heißt A der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to a$ und man schreibt

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Bei Folgen $\{x_n\}$, die sich dem Wert a von kleineren Werten (bzw. größeren Werten) her nähern, spricht man vom linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert.

Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig im Punkt a, wenn gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Eine Funktion heißt stetig im Intervall $\mathbf{I}$, wenn sie für jedes $a \in \mathbf{I}$ stetig ist.

Umkehrbare Funktionen

Eine Funktion $f(x)$, bei der es zu jedem $y \in \mathbf{W}$ genau ein $x \in \mathbf{D}$ mit der Eigenschaft $y = f(x)$ gibt, heißt umkehrbar eindeutige Funktion. Für umkehrbar eindeutige Funktionen $y = f(x)$ lassen sich Umkehrfunktionen f^{-1} definieren durch

$$f^{-1}(y) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = y.$$

Die Umkehrfunktion f^{-1} darf nicht mit der reziproken Funktion $1/f$ verwechselt werden. Für nicht eindeutig umkehrbare Funktionen werden oft Umkehrfunktionen in einem eingeschränkten Definitionsbereich definiert.

Vektorwertige Funktionen

Wenn durch eine Funktionsvorschrift einer (skalaren) Variablen t ein Vektor $\vec{r}$ zugeordnet wird, nennt man $\vec{r} = \vec{r}(t)$ eine vektorwertige Funktion: der Wertebereich $\mathbf{W}$ ist die Menge der Vektoren (z.B. mit drei Komponenten). Die skalare Variable t wird auch Parameter genannt. Durch eine Zuordnung

$$\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t)) = x(t) \cdot \vec{u}_x + y(t) \cdot \vec{u}_y + z(t) \cdot \vec{u}_z$$

kann eine Raumkurve definiert werden.

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Eine Funktion mehrerer Veränderlicher ist durch eine Vorschrift f definiert, die n-tupeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ einen Wert $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zuordnet.

6.2 Polynome und rationale Funktionen

Polynome

Ein Polynom (ganzrationale Funktion) ist eine Funktion $p(x)$, deren Wert mit endlich vielen der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation zu berechnen ist. Ein Ausdruck

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

heißt Polynom n-ten Grades. Die Berechnung von Funktionswerten erfolgt rationell gemäß dem Horner-Schema

$$p(x) = ((\ldots((a_n \cdot x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0.$$

Durch die Funktionswerte an $(n+1)$ verschiedenen Punkten $x_0,\, x_1,\, x_2\ \ldots\, x_n$ ist ein Polynom n-ter Ordnung eindeutig festgelegt. Summe und Produkt zweier Polynome sind wieder Polynome.

Divisionsalgorithmus

Der Grad des Polynoms $p(x)$ sei n, und der Grad des Polynoms $q(x)$ sei m mit $m < n$. Dann gibt es für die Polynome $p(x)$ und $q(x)$ die Darstellung

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x)$$

mit Polynomen $s(x)$, $r(x)$, wobei der Grad von $r(x)$ kleiner als der Grad von $s(x)$ ist. Diese Darstellung entspricht einer Division des Polynoms $p(x)$ durch das Polynom $q(x)$ mit Rest. Die Bestimmung des Polynoms $s(x)$ erfolgt, indem jeweils die Summanden von $p(x)$ (bzw. des Restes) und von $q(x)$ mit der höchsten Potenz verglichen werden. Ist α eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$ vom Grad n, so verbleibt bei Division von $p(x)$ durch $(x-\alpha)$ kein Rest: $p(x) = (x-\alpha)q(x)$, wobei $q(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist. Sind alle Nullstellen $\alpha,\, \beta \ldots$ bekannt, läßt sich das Polynom in die Form

$$p(x) = a_n(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\delta)$$

bringen. Die Nullstellen sind im allgemeinen komplex (siehe Kapitel 2.3) und können ganz oder teilweise zusammenfallen; eine k-fache Nullstelle α führt auf den Faktor $(x-\alpha)^k$.

Rationale Funktionen

Die rationalen Funktionen (gebrochen rationalen Funktionen) sind Quotienten von Polynomen $p(x)$ und $q(x)$:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad q(x) \neq 0.$$

Ist der Grad n des Zählerpolynoms $p(x)$ größer als der Grad m des Nennerpolynoms $q(x)$, so ist nach dem Divisionsalgorithmus die Darstellung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{s(x)q(x) + r(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

möglich, wobei der Grad des Polynoms $r(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$ ist. Die echte rationale Funktion $r(x)/q(x)$ kann in Teilbrüche zerlegt werden, deren Zählerpolynom konstant ist. Dies ist unter anderem erforderlich bei der Integration rationaler Funktionen.

Teilbruchzerlegung (Partialbruchzerlegung)

Der einfachste Fall der Teilbruchzerlegung des Ausdrucks $r(x)/q(x)$ liegt vor, wenn alle Nullstellen α, β, $\ldots\delta$ des Nennerpolynoms einfache Nullstellen sind. Dann gilt: $q(x) = b_m(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\delta)$ und die Entwicklung in Teilbrüche hat die Form

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{x-\beta} + \ldots + \frac{A_m}{x-\delta}.$$

Für die Koeffizienten A_1, A_2, $\ldots$ A_m erhält man ein lineares Gleichungssystem, indem man die Koeffizienten der Glieder gleicher Potenzen von x in $r(x)$ und (nach Ausmultiplizieren) in

$$q(x)\left(\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{x-\beta} + \ldots + \frac{A_m}{x-\delta}\right)$$

vergleicht. Treten mehrfache Wurzeln auf, z.B. sei α eine k-fache Nullstelle, dann treten in der Entwicklung in Teilbrüche die Terme

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

auf. Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt wie bei einfachen Nullstellen.

Um insgesamt reelle Koeffizienten zu erhalten, kann man die komplexen Nullstellen analog durch die Glieder

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{B_lx + C_l}{(x^2+px+q)^l}$$

behandeln.

6.3 Exponential- und Logarithmusfunktion

Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist durch die unendliche Reihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{k!} = e^x$$

definiert mit

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2.718\,282\,.$$

Die unendliche Reihe konvergiert für beliebige x. Mit Hilfe des Cauchy-Produkts läßt sich zeigen, daß für die Funktion $\exp(x)$ die Funktionalgleichung

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \exp(x+y)$$

gilt. Die Funktion $\exp(x)$ ist eine monoton wachsende Funktion mit $\exp(x) > 0$.

Natürlicher Logarithmus

Die Umkehrfunktion der Funktion $\exp(x)$ heißt natürlicher Logarithmus:

$$y = \exp(x) = e^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln y = x \qquad y > 0$$

Aus der Definition folgt unmittelbar:

$$y = \exp(\ln y) = e^{\ln y} \qquad\qquad x = \ln(\exp(x)) = \ln e^x$$

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus siehe unten (allgemeine Logarithmusfunktion) .

Allgemeine Potenzfunktion

Die speziellen Polynome x^n mit $n = 0, 1, 2 \ldots$ heißen Potenzen. Für negative Potenzen gilt: $x^{-n} = 1/x^n$. Bei Beschränkung des Definitionsbereiches auf $x > 0$ sind die positiven Potenzen umkehrbar eindeutig, die Umkehrfunktion wird Wurzelfunktion genannt:

$$y = x^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}.$$

Damit hat der Ausdruck x^a mit einer rationalen Zahl $a = m/n\,,\ m, n \in \mathbf{Z}$ die Definition

$$x^a = x^{m/n} = (x^{1/n})^m = (x^m)^{1/n}.$$

Der Ausdruck x^a kann für beliebige reelle Zahlen a definiert werden (für $x > 0$) durch

$$x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}.$$

Es gelten die Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} x^a\, x^b &= x^{a+b} & \qquad (x^a)^b &= x^{a \cdot b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} & \qquad \sqrt[b]{x^a} &= x^{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion

Die Funktion

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad a > 0$$

heißt allgemeine Exponentialfunktion, und ihre Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis a:

$$y = a^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \log_a y.$$

Der Logarithmus zur Basis 10 heißt dekadischer Logarithmus: $\lg y = \log_{10} y$. Zur Umrechnung von einer Basis zu einer anderen ist die folgende Formel nützlich:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad\qquad \frac{1}{\ln 10} = \lg e = 0.43429 = \frac{1}{2.30259}$$

Die Funktion $\log_a x$ ist bei positivem $a \neq 1$ für alle positiven x definiert und hat die Eigenschaften:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad\qquad \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a x_1^{x_2} = x_2 \log_a x_1$$

6.4 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen (oder Winkelfunktionen) sind Funktionen von Winkeln. Das natürliche Maß für Winkel ist das Bogenmaß

$$\alpha = \frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Radius}}$$

mit der Einheit Radian (rad). Der volle Kreis entspricht 2π. Andere Einheiten sind Grad und Neugrad:

$$\begin{aligned} \text{Grad} : 360^\circ &\equiv 2\pi & \qquad 1\ \text{rad} = 57.2957795^\circ \qquad 1^\circ = 0.017453\,\text{rad} \\ \text{Neugrad} : 400^\circ &\equiv 2\pi \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen können im Einheitskreis (Radius = 1) und (für spitze Winkel) am rechtwinkligen Dreieck definiert werden:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} & \qquad \tan\alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c} & \qquad \cot\alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 & \qquad \tan\alpha \cdot \cot\alpha &= 1 \end{aligned}$$

In der englischsprachigen Literatur werden auch Sekans und Kosekans definiert durch

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Einige Funktionswerte:

α	=	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
$\sin\alpha$	=	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	0
$\cos\alpha$	=	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	1
$\tan\alpha$	=	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	0
$\cot\alpha$	=	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$\mp\infty$	$\mp\infty$
α	=	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$

Die Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ sind periodisch mit der Periode 2π:

$$\begin{aligned}
\sin(n\cdot 2\pi \pm \alpha) &= \pm\sin\alpha & \cos(n\cdot 2\pi \pm \alpha) &= \cos\alpha & n &= \ldots -1,\,0,\,1,\,2,\,\ldots \\
\sin(\pi/2 \pm \alpha) &= \cos\alpha & \cos(\pi/2 \pm \alpha) &= \mp\sin\alpha \\
\sin(\pi \pm \alpha) &= \mp\sin\alpha & \cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos\alpha \\
\sin(3\pi/2 \pm \alpha) &= -\cos\alpha & \cos(3\pi/2 \pm \alpha) &= \pm\sin\alpha
\end{aligned}$$

Die Funktionen $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$ sind periodisch mit der Periode π:

$$\tan(n\cdot\pi \pm \alpha) = \pm\tan\alpha \qquad \cot(n\cdot\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha \qquad n = \ldots -1,\,0,\,1,\,2,\,\ldots$$

Im folgenden werden die Argumente der trigonometrischen Funktionen mit x und y bezeichnet. Beziehungen der trigonometrischen Funktionen untereinander:

$$\begin{array}{ccccccc}
\sin x & = & \sqrt{1-\cos^2 x} & = & \tan x/\sqrt{1+\tan^2 x} & = & 1/\sqrt{1+\cot^2 x} \\
\sqrt{1-\sin^2 x} & = & \cos x & = & 1/\sqrt{1+\tan^2 x} & = & \cot x/\sqrt{1+\cot^2 x} \\
\sin x/\sqrt{1-\sin^2 x} & = & \sqrt{1-\cos^2 x}/\cos x & = & \tan x & = & 1/\cot x \\
\sqrt{1-\sin^2 x}/\sin x & = & \cos x/\sqrt{1-\cos^2 x} & = & 1/\tan x & = & \cot x
\end{array}$$

Weitere Formeln:

$$\begin{aligned}
\sin(x\pm y) &= \sin x\cos y \pm \cos x \sin y & \sin 2x &= 2\sin x\cos x \\
\cos(x\pm y) &= \cos x\cos y \mp \sin x \sin y & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\tan(x\pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} & \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} & \cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} & \cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x\sin y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) & \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\
\sin x\cos y &= \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right) & \sin x\cos x &= \frac{1}{2}\sin 2x \\
\cos x\cos y &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right) & \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x)
\end{aligned}$$

Superposition der sin- und cos-Funktion (z.B. $x = \omega t$):

$$a_1\sin x + a_2\cos x = A\sin(x+\varphi) \quad \text{mit} \quad A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = a_2/a_1$$

$$a_1\sin(x+\varphi_1) + a_2\cos(x+\varphi_2) = A\sin(x+\varphi)$$

$$\text{mit} \quad A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad \text{und} \qquad \tan\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}$$

Arcusfunktionen. Die Funktionen $\sin x$ und $\tan x$ sind streng monoton im Intervall $(-\pi/2, +\pi/2)$; die Funktionen $\cos x$ und $\cot x$ sind streng monoton im Intervall $(0, +\pi)$. Bei Einschränkung auf diese Intervalle sind die trigonometrischen Funktionen daher umkehrbar; die inversen trigonometrischen Funktionen heißen Arcus-Funktionen.

$$
\begin{array}{rclcrcll}
y & = & \arcsin x & \Longleftrightarrow & x & = & \sin y & (-1 \leq x \leq +1) \\
y & = & \arccos x & \Longleftrightarrow & x & = & \cos y & (-1 \leq x \leq +1) \\
y & = & \arctan x & \Longleftrightarrow & x & = & \tan y & (-\infty \leq x \leq +\infty) \\
y & = & \operatorname{arccot} x & \Longleftrightarrow & x & = & \cot y & (-\infty \leq x \leq +\infty)
\end{array}
$$

Ihre Werte in den oben angegebenen Intervallen heißen Hauptwerte. Weitere Werte ergeben sich aus den Eigenschaften der entsprechenden trigonometrischen Funktionen (siehe oben), z.B.

$$\sin y = \sin(\pi - y) = \sin(n \cdot 2\pi + y) = \sin(n \cdot 2\pi + \pi - y)$$

Die **Eulersche Formel**

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

verknüpft die Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Funktionen (s. Abschnitt 2.2).

6.5 Hyperbelfunktionen

Bestimmte Kombinationen der Exponentialfunktionen e^x und e^{-x} mit reellem x kommen häufig in Anwendungen vor und werden als Hyperbelfunktionen bezeichnet.

$$
\begin{array}{rcl}
\sinh x & = & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
\cosh x & = & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x & = & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} & = & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & \\
\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} & = & \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} & x \neq 0 \\
\tanh x \cdot \coth x & = & 1 &
\end{array}
$$

Beziehungen der Hyperbelfunktionen untereinander:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\sinh x & = & \sqrt{\cosh^2 x - 1} & = & \tanh x / \sqrt{1 - \tanh^2 x} & = & 1/\sqrt{\coth^2 x - 1} \\
\sqrt{\sinh^2 x + 1} & = & \cosh x & = & 1/\sqrt{1 - \tanh^2 x} & = & \coth x / \sqrt{\coth^2 x - 1} \\
\sinh x / \sqrt{\sinh^2 x + 1} & = & \sqrt{\cosh^2 x - 1} / \cosh x & = & \tanh x & = & 1/\coth x \\
\sqrt{\sinh^2 x + 1} / \sinh x & = & \cosh x / \sqrt{\cosh^2 x - 1} & = & 1/\tanh x & = & \coth x
\end{array}
$$

Weitere Formeln:

$$
\begin{array}{rcl}
\sinh(x \pm y) & = & \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \pm y) & = & \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\tanh(x \pm y) & = & \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\sinh 2x & = & 2 \sinh x \cosh x \\
\cosh 2x & = & \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
\tanh 2x & = & \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\sinh x + \sinh y & = & 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\
\sinh x - \sinh y & = & 2 \cos \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\cosh x + \cosh y & = & 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\
\cosh x - \cosh y & = & 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}
\end{array}
$$

Areafunktionen Die Funktionen $\sinh x$ und $\tanh x$ sind streng monoton wachsend und daher umkehrbar; die Funktion $\cosh x$ ist streng monoton wachsend für $x \geq 0$. Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen Area-Funktionen.

$$
\begin{array}{rclcrcll}
y & = & \operatorname{arsinh} x & \Longleftrightarrow & x & = & \sinh y & \\
y & = & \operatorname{arcosh} x & \Longleftrightarrow & x & = & \cosh y & x \geq 1;\ y \geq 0 \\
y & = & \operatorname{artanh} x & \Longleftrightarrow & x & = & \tanh y & |x| < 1 \\
y & = & \operatorname{arcoth} x & \Longleftrightarrow & x & = & \coth y & |x| > 1;\ y \neq 0
\end{array}
$$

Die Area-Funktionen lassen sich durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken:

$$
\begin{array}{rcll}
\operatorname{arsinh} x & = & \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) & \\
\operatorname{arcosh} x & = & \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & x \geq 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcll}
\operatorname{artanh} x & = & \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & |x| < 1 \\
\operatorname{arcoth} x & = & \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} & |x| > 1
\end{array}
$$

6.6 Fakultät und Gammafunktion

Fakultät

Unter der Fakultät $n!$ einer positiven ganzen Zahl n versteht man das Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n! \quad \text{mit den Eigenschaften:} \quad n! = n \cdot (n-1)! \qquad 0! = 1.$$

Näherung für große n (Stirlingsche Formel):

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \ldots\right) \qquad \ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}.$$

Gammafunktion

Der Begriff der Fakultät läßt sich auf beliebige (auch komplexe) Zahlen x zur Gammafunktion $\Gamma(x)$ verallgemeinern. Bei ganzzahligen positiven n gilt:

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Allgemeine Definition der Gammafunktion:

$$\Gamma(x) \quad \begin{cases} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt & x > 0 \\ = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} & x \neq 0, -1, -2, \ldots \end{cases}$$

Eigenschaften:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Spezielle Werte:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \Gamma(2) = 1$$