Kapitel 4

Lineare Algebra

4.1 Matrizen

Eine $m \cdot n$ Matrix A hat $m \times n$ Elemente a_{ij} in m Zeilen und n Spalten:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Addition zweier Matrizen A und B mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl erfolgt durch elementweises Addieren:

$$C = A + B \qquad\qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Bei der Multiplikation einer Matrix A mit einer Zahl λ wird jedes Element a_{ij} mit der Zahl multipliziert:

$$C = \lambda A \qquad\qquad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Das Produkt zweier Matrizen A und B ist definiert, wenn die Spaltenzahl n von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt:

$$C = AB \qquad\qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Die Produktmatrix C hat die gleiche Zeilenzahl wie A und die gleiche Spaltenzahl wie B. Ein Element c_{ij} der Produktmatrix entsteht durch Multiplikation der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B. Im allgemeinen ist $AB \neq BA$.

Die Matrix A^T heißt die zur Matrix A transponierte Matrix und entsteht durch Vertauschen der Zeilen und Spalten von A. Es gilt:

$$B = A^T \qquad b_{ij} = a_{ji} \quad \text{mit} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

Eine Matrix heißt quadratisch, wenn Zeilen- und Spaltenzahl übereinstimmen. Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, wenn gilt:

$$A = A^T \qquad\qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn die Elemente außerhalb der Diagonalen verschwinden:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j$$

Eine Einheitsmatrix E ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente gleich 1 sind:

$$e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad\qquad \delta = \text{Kronecker-Symbol}$$

Vektoren können als Spezialfälle der Matrizen aufgefaßt werden. Spaltenvektoren oder kurz Vektoren im $\mathbf{R}^n$ sind Matrizen mit n Zeilen und einer Spalte. Sie werden in diesem Abschnitt, wie in diesem Kontext üblich, nicht durch einen Vektorpfeil gekennzeichnet. Zwischen zwei Vektoren x und y im $\mathbf{R}^n$,

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n) \qquad\qquad y = (y_1, y_2, \dots y_n)$$

ist als skalares Produkt definiert:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

(diese Definition entspricht der vorher für Vektoren im dreidimensionalen Raum eingeführten). Werden x und y als einspaltige Matrizen aufgefaßt, so ist $\langle x, y \rangle = x^T y$. ($T$ = Transposition, erzeugt Zeilenvektor)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad \text{Betrag von } x.$$

Das skalare Produkt kann wie früher mit

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi$$

durch die Längen $\|x\|$ und $\|y\|$ und den Winkel φ zwischen den Vektoren ausgedrückt werden.

Wenn C eine symmetrische $n \cdot n$ Matrix ist, so heißt $\langle x, Cx \rangle$ eine quadratische Form. Die Definition

$$\langle x, Cx \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j$$

entspricht dem Matrixprodukt $x^T C x$. Die symmetrische Matrix C heißt positiv definit, wenn für alle x (mit $\|x\| \neq 0$)

$$\langle x, Cx \rangle > 0$$

gilt. Eine Matrix ist genau dann positiv definit, wenn für $k = 1, \ldots n$ gilt:

$$\det \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \ldots & & \ldots \\ c_{k1} & \ldots & c_{kk} \end{vmatrix} > 0.$$

Mit einer $m \cdot n$ Matrix A wird durch die Matrixgleichung

$$y = Ax$$

ein n-Vektor x auf einen m-Vektor y linear abgebildet oder in diesen transformiert.

Inverse Matrix. Die Determinante einer quadratischen Matrix A ist $\det A = |a_{ij}|$. Für $\det A \neq 0$ heißt die Matrix nichtsingulär. Für eine nichtsinguläre Matrix wird eine inverse Matrix A^{-1} definiert durch

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Die Elemente der inversen Matrix $B = A^{-1}$ sind:

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

Dabei ist A_{ji} das algebraische Komplement zu dem Element a_{ji}. Es gilt:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad\qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Lineare Gleichungssysteme. Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots\ a_{nn}x_n & = & y_n \end{array}$$

mit den Unbekannten x_i, läßt sich als Matrixgleichung

$$Ax = y$$

schreiben mit der quadratischen Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$ und den Vektoren x und y. Wenn die Matrix A nichtsingulär ist, ergibt sich die Lösung durch

$$x = A^{-1}y$$

mit der zu A inversen Matrix A^{-1}.

Anders gedeutet, beschreibt das Gleichungssystem eine lineare Transformation des Vektors x in den Vektor y.

4.2 Drehungen

Drehungen sind spezielle lineare Transformationen. In diesem Kapitel werden Vektoren in einem dreidimensionalen Raum mit den zueinander orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{u}_i$ ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$) betrachtet. Für einen Vektor $\vec{x}$ gilt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$$

Die Einheitsvektoren sollen ein Rechtssystem bilden, d.h.

$$\vec{u}_1(\vec{u}_2 \times \vec{u}_3) = 1.$$

Eine Drehung des Koordinatensystems kann beschrieben werden durch Angabe der neuen orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{u}'_i$ in dem nichtgedrehten System:

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{u}'_1 & = & a_{11}\vec{u}_1 & + & a_{12}\vec{u}_2 & + & a_{13}\vec{u}_3 \\ \vec{u}'_2 & = & a_{21}\vec{u}_1 & + & a_{22}\vec{u}_2 & + & a_{23}\vec{u}_3 \\ \vec{u}'_3 & = & a_{31}\vec{u}_1 & + & a_{32}\vec{u}_2 & + & a_{33}\vec{u}_3 \end{array} ,$$

allgemein:

$$\vec{u}'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\vec{u}_j \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \vec{u}'_i\vec{u}_j = \cos\theta_{ij}.$$

Die Elemente a_{ij} bilden eine Drehmatrix A. Ein allgemeiner Vektor $\vec{x}$ mit $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ hat im gedrehten System die neuen Komponenten x'_i:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \quad i = 1, 2, 3.$$

Diese Drehung läßt sich durch die Matrixgleichung

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

darstellen mit der Drehmatrix A.
Ein Zahlentripel stellt genau dann einen Vektor dar, wenn es sich bei Koordinatendrehungen gemäß der Formel

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

mit einer Drehmatrix A transformiert.

Eigenschaften der Drehmatrix. Aus der Orthogonalität der neuen Einheitsvektoren $\vec{u}'_i$

$$\vec{u}'_i\vec{u}'_j = \delta_{ij}$$

folgt:

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \qquad \sum_{k=1}^{3} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}.$$

Diese Beziehungen entsprechen in der Matrixschreibweise

$$A^T A = AA^T = E$$

und daraus folgt $A^{-1} = A^T$ für eine Drehmatrix. Matrizen mit dieser Eigenschaft haben die Determinante

$$\det A = \pm 1.$$

Für $\det A = +1$ entspricht die Transformation durch die Matrix A einer reinen Drehung (Übergang von einem Rechtssystem zu einem Rechtssystem), wie aus

$$\vec{u}'_1(\vec{u}'_2 \times \vec{u}'_3) = 1.$$

für ein Rechtssystem folgt. Bei $\det A = -1$ bilden die neuen Einheitsvektoren ein Linkssystem.

Mehrfache Drehungen. Wenn zwei Drehungen mit den Matrizen A und B nacheinander ausgeführt werden, ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A\vec{x} \\ \vec{x}'' &= B\vec{x}' = BA\vec{x}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist identisch mit einer Drehung mit einer Matrix $C = BA$ (beachte: $BA \neq AB$). Durch die Drehung mit der Matrix A^{-1} wird die Drehung mit der Matrix A wieder rückgängig gemacht:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= A\vec{x} \\ \vec{x}'' &= A^{-1}\vec{x}' = A^{-1}A\vec{x} = \vec{x} \end{aligned}$$