Kapitel 3

Vektoren

3.1 Skalare, Vektoren, Tensoren

Viele physikalische Größen lassen sich bei bekannter Maßeinheit durch Angabe ihres Betrages als reelle Zahl vollständig angeben. Solche Größen nennt man Skalare, Beispiele sind Masse und Temperatur. Andere physikalischen Größen erfordern zur vollständigen Festlegung drei Zahlenangaben, z.B. die geradlinige Verschiebung eines Punktes aus einer Anfangslage. Diese Verschiebung kann angegeben werden durch den Betrag und die Richtung (zwei Winkel), oder durch die drei Komponenten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (drei einfach indizierte Komponenten). Physikalische Größen, die wie die Verschiebung durch Angabe von Betrag und Richtung im Raume festgelegt sind, und demselben Additionsgesetz wie die Verschiebung gehorchen, nennt man Vektoren. Physikalische Formeln verbinden einzelne Größen miteinander. Durch die Vektorschreibweise können viele Zusammenhänge auf eine kurze, prägnante Form gebracht werden. Dabei ist die Formulierung eines Gesetzes unabhängig von der Wahl eines speziellen Koordinatensystems; erst bei der numerischen Auswertung muß ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde gelegt werden.

Neben den skalaren Größen und den Vektoren gibt es in der Physik noch Tensoren. Sie werden durch Matrizen dargestellt (s. Kap. 4.1), die durch ein lineares Gleichungssystem einen bestimmten Vektor in einen anderen transformieren. Das Urbild des Tensors ist der Spannungszustand in einem festen Körper. Ein solcher 2-dimensionaler Tensor (genauer: Tensor 2. Stufe) kann durch zweifach indizierte Komponenten (insgesamt 9 Komponenten) angegeben werden. In der Physik treten auch Tensoren dritter und noch höherer Stufe auf, mit entsprechend vielfach indizierten Komponenten. Vektoren können als Tensoren 1. Stufe aufgefaßt werden.

3.2 Vektoren

In der Physik werden Vektoren vorwiegend für die Darstellung gerichteter Größen, z.B. für eine Verschiebung verwendet. Im Gegensatz zum Skalar bestimmen mehrere Skalare einen Vektor. Diese können, wie unten aufgeführt wird, Koordinaten, oder wie bei einer Verschiebung räumliche Richtung und Länge des Vektors sein.

Hier verwendete Nomenklatur

Vektor a: $\vec{a}$

Betrag von $\vec{a}$: $|\vec{a}| \equiv a$. Dies ist die Länge des Vektors.

Einheitsvektor: $\vec{u}$. $|\vec{u}| = 1$.

Der Nullvektor hat den Betrag 0, seine Richtung ist unbestimmt.

Wie bei einer Verschiebung ist die Lage eines Vektors im Raum beliebig. Nur Richtung und Länge charakterisieren ihn (Ausnahme: Ortsvektoren; s. Abschnitt 3.2.2).

3.2.1 Vektoren in Koordinatensystemen

Führt man durch Achsen, die sich im Ursprung schneiden, ein Koordinatensystem ein, so kann man Vektoren durch ihre Komponenten angeben. Beispielsweise im dreidimensionalen Raum (x_1, x_2, x_3):

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) && \text{mit} \\ a_1 &= a_{1e} - a_{1a} \\ a_2 &= a_{2e} - a_{2a} \\ a_3 &= a_{3e} - a_{3a} \end{aligned}$$

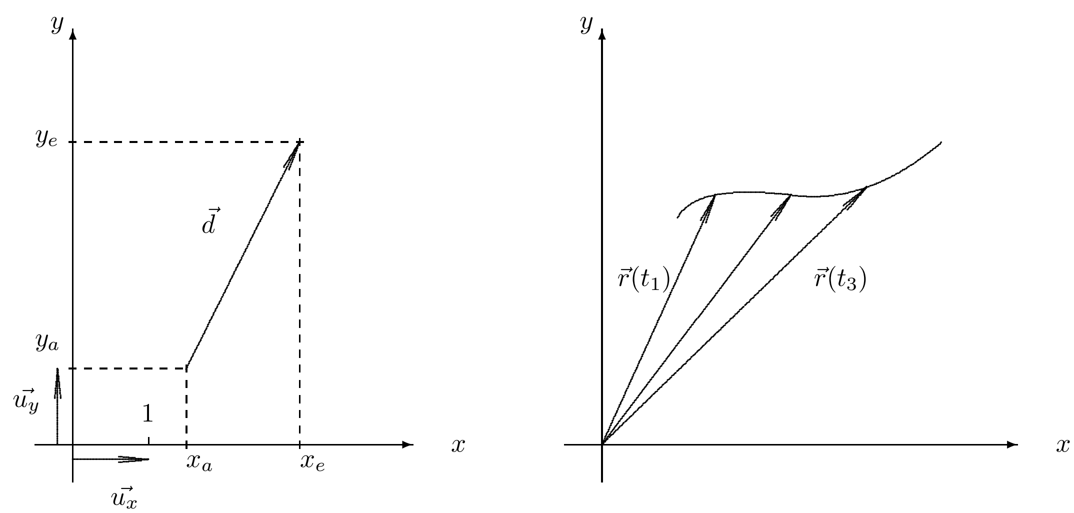
Die Indices a und e stehen für Anfang (Fußpunkt) und Ende (Spitze) des Vektors.
Die Einheitsvektoren $\vec{u}_1$ bis $\vec{u}_3$ in Richtung der Achsen bilden die Basis des Koordinatensystems.

Im **kartesischen Koordinatensystem** stehen die Koordinatenachsen paarweise senkrecht aufeinander. Man bezeichnet die Koordinatenachsen häufig durch x, y und z und beschreibt den Vektor $\vec{a}$ durch $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Der **Betrag** dieses Vektors errechnet sich durch

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Üblicherweise definiert man das kartesische Koordinatensystem als Rechtssystem. D.h. wird die 1. Achse (x-Achse) um 90° in die 2. Achse (y-Achse) gedreht, so würde sich eine auf der 3. Achse (z-Achse) liegende, mitdrehende Rechtsschraube in positive z-Richtung fortbewegen.

Die Darstellung von Vektoren in Polar-, Kugel- bzw. Zylinderkoordinaten wird im 2. Teil dieser Formelsammlung beschrieben.



Verschiebung $\vec{d}$ in der $x-y-$Ebene

Ortsvektoren

3.2.2 Ortsvektoren

Ortsvektoren sind spezielle Vektoren, deren Fußpunkte alle im Koordinatenursprung liegen. Die Spitze von $\vec{r} = (x, y, z)$ gibt die Position des Punktes $P = (x, y, z)$ an. Ändert sich der Ortsvektor mit der Zeit, so beschreibt $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eine Bahnkurve.

3.3 Rechenregeln mit Vektoren

3.3.1 Addition von Vektoren

Zwei Verschiebungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nacheinander ausgeführt entsprechen einer einzigen Verschiebung $\vec{c}$. Man beschreibt dies durch die Vektoraddition

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

und in Komponenten z.B. im kartesischen Koordinatensystem

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Die Vektoraddition ist kommutativ:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Der Vektor $-\vec{a}$ hat den gleichen Betrag wie $\vec{a}$, jedoch entgegengesetzte Richtung; es gilt $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$. Die mehrfache Addition des selben Vektors führt zu der Multiplikation mit einem Skalar:

$$\vec{c} = h\vec{a} = (h \cdot a_x, h \cdot a_y, h \cdot a_z).$$

Der Vektor $\vec{c}$ hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\vec{a}$. Die Länge ist um den Faktor h gedehnt: $c = ha$.
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen kollinear (oder linear abhängig), wenn es zwei Zahlen h_1 und h_2 gibt, mit denen $h_1\vec{a} + h_2\vec{b} = 0$ erreicht werden kann.
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heißen koplanar (oder linear abhängig), wenn es drei Zahlen h_1, h_2 und h_3 gibt, mit denen $h_1\vec{a} + h_2\vec{b} + h_3\vec{c} = 0$ erreicht werden kann.
Drei nichtkoplanare Vektoren heißen linear unabhängig. Jeder Vektor im dreidimensionalen Raum kann durch eine Linearkombination von drei linear unabhängigen Vektoren dargestellt werden. Z.B. sind die Einheitsvektoren parallel zu den Achsen in einem kartesischen Bezugssystem $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ und $\vec{u}_z$ linear unabhängig.
Jeder Vektor $\vec{a}$ kann als Linearkombination der Einheitsvektoren dargestellt werden:

$$\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z.$$

3.3.2 Multiplikation: Das Skalare Produkt

Das skalare Produkt $\vec{a}\vec{b}$ (auch inneres Produkt genannt) der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Skalar, der definiert ist durch

$$\vec{a}\vec{b} = ab\cos\varphi,$$

wobei φ der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist.
Übliche Schreibweisen sind auch

$$\vec{a}\vec{b} \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} \equiv < \vec{a}, \vec{b} > .$$

Für die Einheitsvektoren $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gilt:

$$\vec{u}_x\vec{u}_x = \vec{u}_y\vec{u}_y = \vec{u}_z\vec{u}_z = 1 \qquad\qquad \vec{u}_x\vec{u}_y = \vec{u}_y\vec{u}_z = \vec{u}_z\vec{u}_x = 0.$$

Es gilt das Distributivgesetz

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Daraus erhält man die Berechnung des Skalarprodukts über die Komponenten

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= (a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z)(b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z) \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \end{aligned}$$

Es bedeutet anschaulich, $a \cdot (b\cos\varphi)$, daß a mit der Projektion von $\vec{b}$ auf die $\vec{a}$-Richtung multipliziert wird. Analoges gilt für den gleichwertigen Ausdruck $(a\cos\varphi) \cdot b$. Weil die Komponenten eines Vektors die Projektionen auf die Achsen sind, kann man sie durch Skalarprodukte berechnen:

$$\begin{aligned} a_x &= \vec{a}\vec{u}_x; \\ a_y &= \vec{a}\vec{u}_y; \\ a_z &= \vec{a}\vec{u}_z; \end{aligned}$$

d.h.

$$\vec{a} = (\vec{a}\vec{u}_x)\vec{u}_x + (\vec{a}\vec{u}_y)\vec{u}_y + (\vec{a}\vec{u}_z)\vec{u}_z.$$

Weitere Eigenschaften:

$$\begin{array}{rclcrcl} \vec{a}\vec{b} & = & \vec{b}\vec{a} & \qquad & |\vec{a}\vec{b}| & \leq & |\vec{a}||\vec{b}| \\ \vec{a}\vec{a} & = & a^2 \geq 0 & & \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) & \neq & (\vec{a}\vec{b})\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & = & 0 \quad \text{wenn } \vec{a} \perp \vec{b} & & & & \end{array}$$

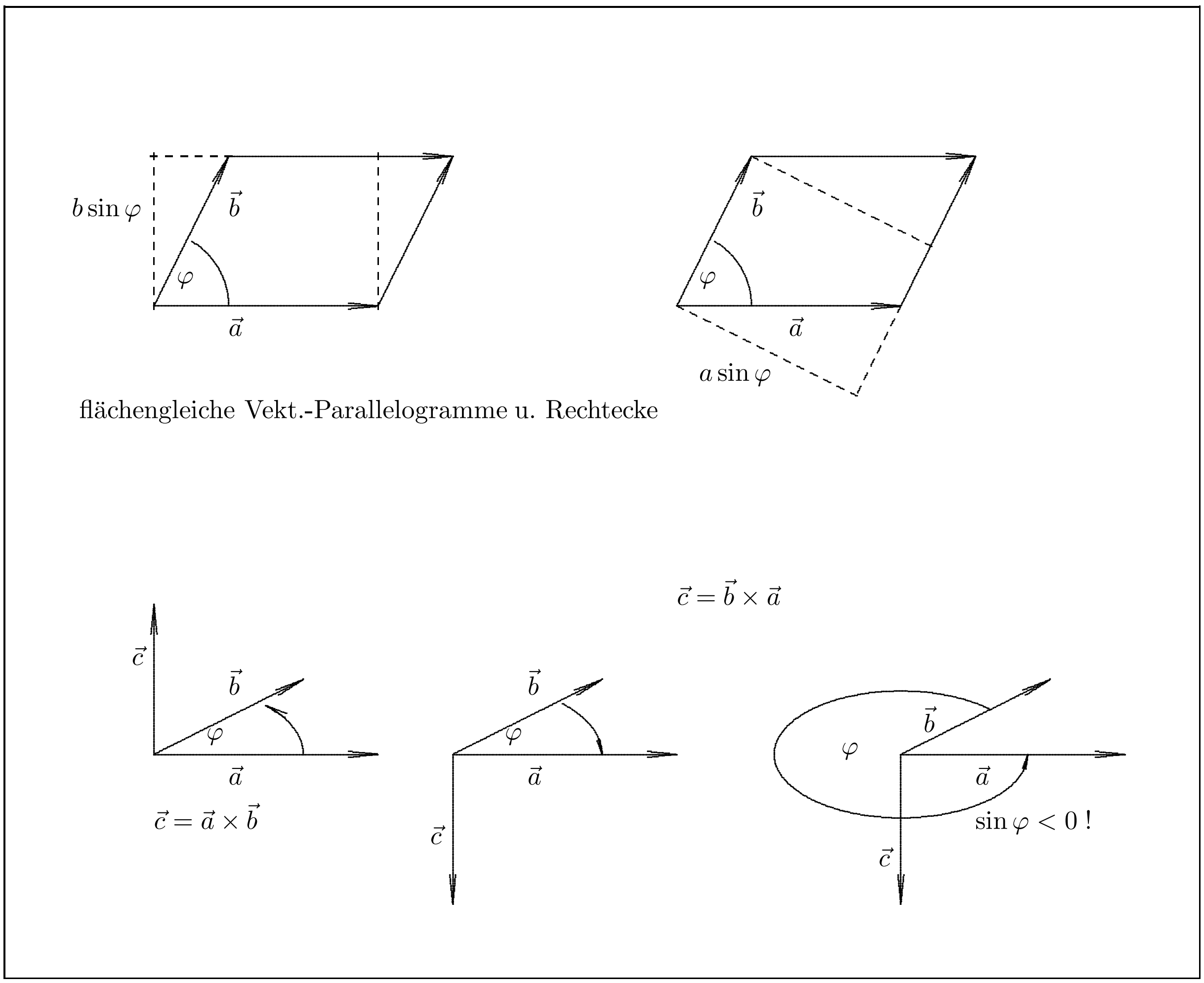
3.3.3 Multiplikation: Das Vektorielle Produkt

Das vektorielle Produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ (auch äußeres Produkt genannt) der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c}$, der den Betrag

$$ab \sin\varphi$$

hat (wobei φ der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist) und senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht; der Vektor $\vec{c}$ ist so gerichtet, daß die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem bilden.

Anschaulich gibt der Betrag von $\vec{c}$ die Größe der von dem Vektor-Parallelogramm ($\vec{a}$, $\vec{b}$) gebildeten Fläche wieder.



Für die Einheitsvektoren $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gilt (Rechtssystem):

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \qquad \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \qquad \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y.$$

Es gilt auch hier das Distributivgesetz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Mit der Darstellung der Vektoren mit den Einheitsvektoren erhält man das Vektorielle Produkt in Komponentendarstellung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{u}_z = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= 0 \quad \text{wenn } \vec{a} \parallel \vec{b} \qquad\qquad \vec{a} \times \vec{a} = 0 \end{aligned}$$

Bei bestimmten Problemen muß unterschieden werden zwischen polaren Vektoren $\vec{a}$ (gewöhnlichen Vektoren) und axialen Vektoren $\vec{b}$, die durch das Vektorprodukt von zwei gewöhnlichen Vektoren definiert sind: ändert man das Vorzeichen aller Koordinaten (Spiegelung im Raum), so geht $\vec{a}$ in $-\vec{a}$, über, dagegen ändert sich das Vorzeichen von $\vec{b}$ nicht. Das skalare Produkt eines polaren und eines axialen Vektors nennt man Pseudoskalar; bei einer Raumspiegelung ändert sich das Vorzeichen eines Pseudoskalars. Axiale Vektoren entsprechen antisymmetrischen Tensoren (2. Stufe).

3.3.4 Mehrfache Produkte

Das **gemischte Produkt (Spatprodukt)**

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ist eine Zahl, deren Betrag gleich ist dem Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (d. h. eines Spats) und deren Vorzeichen positiv (negativ) ist, wenn die drei Vektoren ein Rechtssystem (Linkssystem) bilden. Zyklische Vertauschung der drei Vektoren ändert das Vorzeichen nicht:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})\vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b})\vec{a}.$$

$$\text{oder} \qquad (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \quad \text{usw.}$$

Das **doppelte Vektorprodukt**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

liefert einen Vektor. Es gelten die Identitäten (**Entwicklungssatz**):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \qquad\qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}).$$

3.3.5 Anwendungen auf geometrische Probleme

- Wie im Abschnitt 3.3.3 gezeigt, liefert das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Vektor-Parallelogramms und zeigt als Vektor in die Richtung der Flächennormalen:

  $$\vec{A} = \vec{a} \times \vec{b}$$

  Der Fluß des Stromes $\vec{v}$ durch diese, beliebig orientierte Fläche ist dann gegeben durch

  $$j = \vec{v} \cdot \vec{A}.$$

  Das Skalarprodukt erzeugt durch Projektion die benötigte, senkrecht zum Strom liegende Fläche.

- Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann sowohl über das Skalarprodukt, als auch über das Vektorprodukt berechnet werden. Das Skalarprodukt liefert höhere Genauigkeit in der Nähe von $\varphi = 90°$, während das Vektorprodukt für $\varphi \approx 0$ besser geeignet ist.

  $$\varphi = \arccos \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab} \qquad\qquad \varphi = \arcsin \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{ab}.$$

- Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in den zum Einheitsvektor $\vec{u}$ parallelen und den zu $\vec{u}$ senkrechten Vektor:

  $$\vec{a}_\parallel = \vec{u}(\vec{u}\vec{a}) \qquad\qquad \vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{u}(\vec{u}\vec{a}).$$