

Mathematischer Anhang

Proportionalität

Will man den Zusammenhang zwischen Größen beschreiben, so ist meistens eine einfache „je-desto“-Beziehung nicht genau genug. Lassen die Daten eine Regelmäßigkeit erkennen, kann man diese Beziehung oft durch eine **Proportionalität** genauer beschreiben. Sind zwei Größen proportional zueinander, bedeutet das, dass sie sich im gleichen Maße ändern. Eine Größe a geht aus der anderen Größe b durch Multiplikation mit immer dem gleichen Faktor, dem **Proportionalitätsfaktor** c , hervor:

$$a = c \cdot b$$

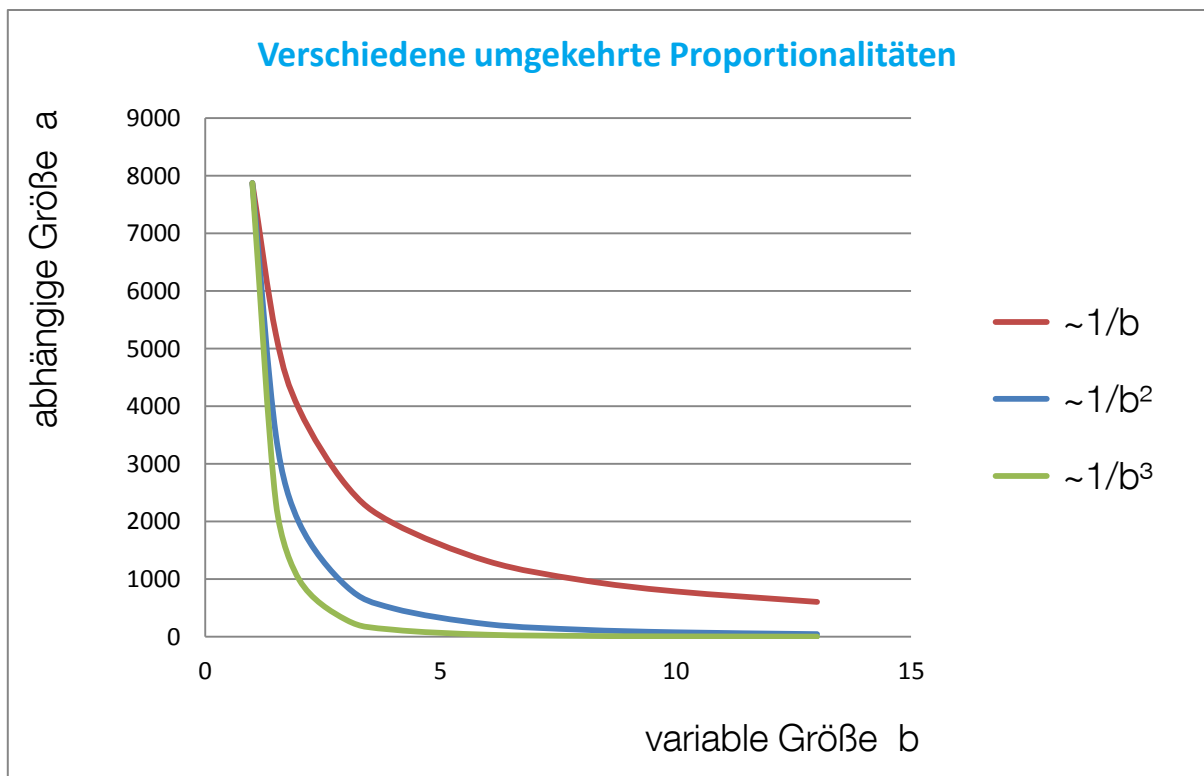
In diesem Beispiel steigt die Größe a , wenn b auch steigt.

Umgekehrt kann eine Größe aber auch sinken, während eine andere steigt. Dies lässt sich dann häufig als **umgekehrte Proportionalität** ausdrücken. Beispiele für umgekehrte Proportionalität sind:

$$a = c \cdot \frac{1}{b}$$

$$a = c \cdot \frac{1}{b^2}$$

$$a = c \cdot \frac{1}{b^3}$$



Ist man unsicher, welche dieser Beziehungen am besten auf die Messdaten passt, kann man für die verschiedenen Beziehungen jeweils den Proportionalitätsfaktor c ermitteln.

<p>Wenn gilt</p> $a = c \cdot \frac{1}{b} \quad \cdot b$ <p>dann ist</p> $a \cdot b = c$	<p>Wenn gilt</p> $a = c \cdot \frac{1}{b^2} \quad \cdot b^2$ <p>dann ist</p> $a \cdot b^2 = c$	<p>Wenn gilt</p> $a = c \cdot \frac{1}{b^3} \quad \cdot b^3$ <p>dann ist</p> $a \cdot b^3 = c$
--	--	--

Dies muss über die gesamte Messreihe, also für alle Wertepaare $\{a, b\}$ gelten. Allerdings müssen die Schwankung der Messwerte beachtet werden. Man kann eine Möglichkeit mit großer Sicherheit ausschließen, wenn sich das Produkt $c_i = a \cdot b^i$ im Verlauf der Messreihe in etwa gleichmäßig ändert, d. h. wenn es tendenziell immer größer oder immer kleiner wird, anstatt um einen konstanten Mittelwert zu schwanken.

Man kann dieses Verhalten gut erkennen, wenn man die verschiedenen möglichen c_i in Abhängigkeit von b grafisch darstellt und miteinander vergleicht.

Einheitenrechnung

Sind a und b Messgrößen, die mit Einheiten behaftet sind, so hat die Proportionalitätskonstante c in der Regel auch eine Einheit.

Beschreibt a beispielsweise die Impulsrate I [Impulse/s] und b den Abstand d [m] zwischen Geiger-Müller-Zähler und Strahlerstift, so hat c – je nachdem welcher Zusammenhang zwischen I und d gilt – eine der folgenden Einheiten:

$$I \left[\frac{\text{Impulse}}{\text{s}} \right] \cdot d[\text{m}] = c \left[\frac{\text{Impulse} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$I \left[\frac{\text{Impulse}}{\text{s}} \right] \cdot d^2[\text{m}^2] = c \left[\frac{\text{Impulse} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

$$I \left[\frac{\text{Impulse}}{\text{s}} \right] \cdot d^3[\text{m}^3] = c \left[\frac{\text{Impulse} \cdot \text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

Ausgleichskurve/-gerade

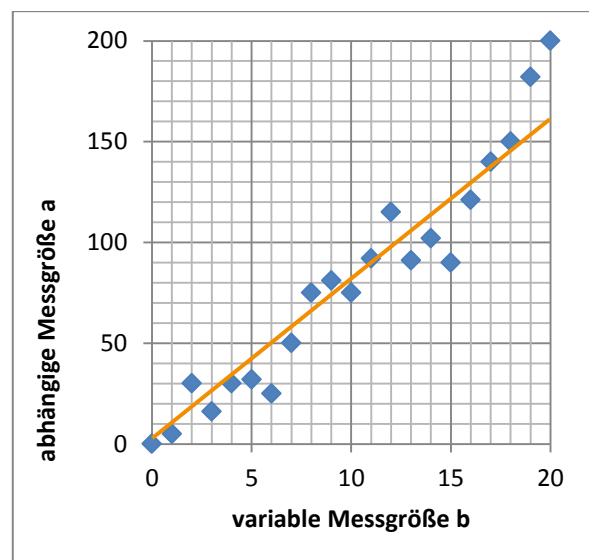
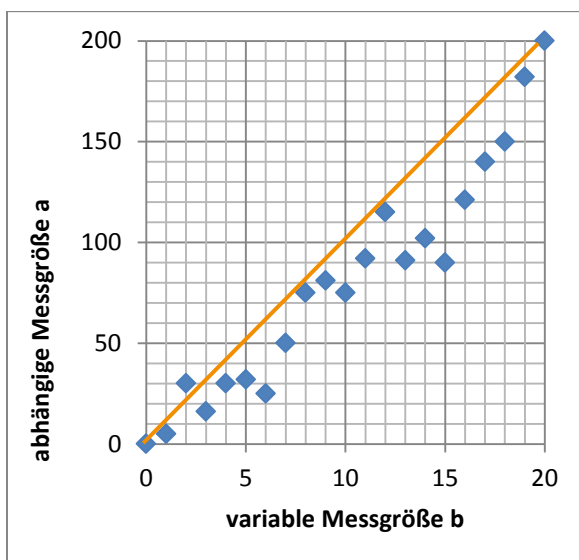
Ein physikalisches Experiment liefert nie ein genaues Ergebnis, da Messdaten mit Messfehlern behaftet sind. Aus diesem Grund verbindet man in der Physik die Messpunkte normalerweise nicht einfach miteinander.

Wenn man das berücksichtigt, lässt sich ziemlich einfach ein Graph erstellen, der den vorliegenden Zusammenhang verdeutlicht. Dazu trägt man zunächst die Messpunkte in ein x-y-Diagramm ein und versucht, aus deren Lage eine passende Beziehung zu vermuten. Liegen die Punkte beispielsweise ungefähr auf einer Geraden, so kann man durch diese Messpunkte eine Ausgleichsgerade zeichnen.

Man kann diese Gerade optimieren, wenn man folgende Kriterien beachtet:

- Alle Punkte liegen auf oder möglichst dicht an der Geraden.
- Die Punkte, die nicht auf der Geraden liegen, verteilen sich ungefähr gleichmäßig auf beide Seiten.
- Außerdem muss die Gerade durch den Nullpunkt verlaufen, falls eine direkte Proportionalität vorliegt.

Ein häufiger Denkfehler von Schülern ist dabei, dass sie den Nullpunkt mit dem letzten Messpunkt verbinden wollen, weil sie vermuten, dieser müsse der genaueste Wert sein. Dabei handelt es sich aber um eine meistens nicht gerechtfertigte Annahme, die die Genauigkeit der Ausgleichsgerade willkürlich und unnötig einschränkt!



Die ins linke Diagramm eingezeichnete Ausgleichsgerade ist nicht ideal. Es liegen viel mehr Messwerte unterhalb der Geraden als oberhalb. Im rechten Diagramm sind die Abweichungen gleichmäßiger verteilt.

Bei vielen Messungen, die in diesem Praktikum durchgeführt werden, bietet es sich an, Ausgleichskurven zu zeichnen. Dabei sollte man sich immer zunächst den theoretischen Kurvenverlauf klar machen und dann versuchen, eine Kurve unter Berücksichtigung der obigen Kriterien zu zeichnen.